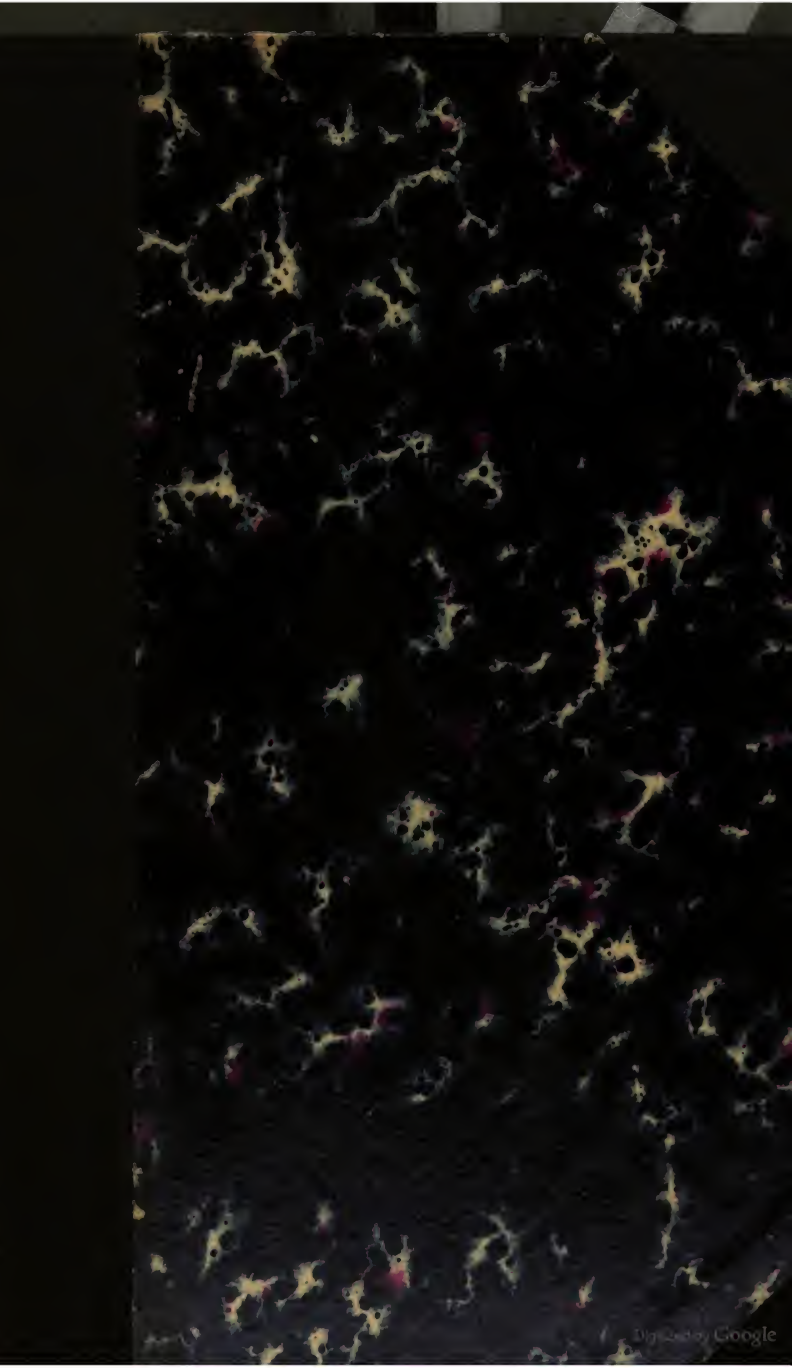


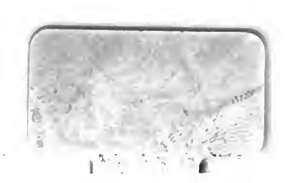
HARVARD UNIVERSITY.



LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.



BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE

JAHRGANG 1851.

LEIPZIG

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

INHALT.

Volkmann, über das Zustandekommen der Muskelcontractionen im Verlaufe der Zeit . . . . S. 1

Erdmann, über eine merkwürdige Structurveränderung bleihaltigen Zinnes . . . . - 5

Derselbe, Mittheilung über Wagners Untersuchung der Moringerbsäure und ihrer Zersetzungsproducte . . . . - 8

Derselbe, über die Zähigkeit des Lebens der *Tradescantia zebrina* . - 18

Möbius, über symmetrische Figuren . . . . - 19

Reich, neue Versuche mit der Drehwaage zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde . . . . - 28

E. F. Weber, über den Mechanismus des Gehörorgans . . . . . - 29

D'Arrest, über die Gruppirung der periodischen Cometen . . . . - 31

Hansen, über ein neues Coordinatensystem. . . . . - 39

Volkmann, über die Kraft, welche in einem gereizten Muskel des animalen Lebens thätig ist . . . . - 54

E. F. Weber, über die Längenverhältnisse der Fleischfasern der Muskeln im Allgemeinen . . . . - 64

D'Arrest, Bericht über die Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss zu Königsberg in Preussen am 28. Juli 1851 . . . . . - 86

Hankel, Messungen der Abstossungen des krystallisirten Wismuths durch die Pole eines Magnets mittelst der Drehwaage . . . . S. 99

Derselbe, über das vermeintliche Leitungsvermögen der Marekanite für Electricität . . . . - 118

Drobisch, über eine Aufgabe Schooten's . . . . - 124

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1851.

I.

LEIPZIG.

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1851.

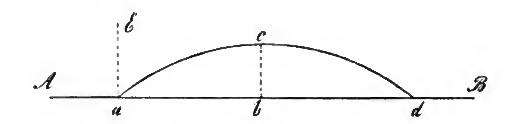
SITZUNG AM 18. JANUAR 1851.

Alfred Wilhelm Volkmann, *Ueber das Zustandekommen der Muskelcontractionen im Verlaufe der Zeit.*

Seit *Ludwig* ein Instrument erfunden, welches gestattet, die veränderlichen Kräfte des Herzens durch Curven darzustellen, lag es sehr nahe, auch andere bewegende Kräfte mit Hülfe jenes Instrumentes anschaulich und messbar zu machen. Es kann daher nicht befremden, dass Herr *Helmholtz* und ich unabhängig von einander auf den Gedanken kamen, das *Ludwig*'sche Kymographion zur Darstellung von Curven anzuwenden, welche die Zusammenziehung und nachmalige Ausdehnung eines gereizten Muskels in der Zeitfolge zur Anschauung bringen. Herr *Helmholtz,* welcher den Gegenstand noch etwas früher als ich in Angriff genommen hatte, verliess die von *Ludwig* empfohlene Methode sehr bald, weil er zu finden glaubte, dass die Curven unter dem nachtheiligen Einflusse einer Reibung ständen, welche der Natur des Apparates zu Folge sich nicht ganz beseitigen liessen. Es gehört nicht hierher nachzuweisen, wie *Helmholtz* durch Erfindung einer ganz neuen Vorrichtung auf ein ganz anderes, vielleicht noch wichtigeres Feld der Beobachtung geführt wurde; was mich anlangt, so blieb ich bei Benutzung des Kymographions stehen, welches zur Lösung einiger nicht uninteressanter Fragen vollkommen geeignet schien.

Man denke sich, der Muskel sei mit dem einen Ende befestigt, während das andere Ende frei sei. Weiter: das freie Ende sei mit einer Schreibfeder versehn, welche auf einen Papierbogen zeichne, so wird jede Muskelcontraction zur Entstehung einer geraden Linie Veranlassung geben, deren Länge der Grösse der

Contraction gleich ist. Gesetzt aber, der Papierbogen bewege sich mit gleichmässiger Geschwindigkeit in einer Richtung, welche die der Muskelcontraction rechtwinklig schneidet, so müssen Curven entstehen, es muss während der Contraction die Curve sich heben und während der Expansion sinken. Das Kymographion ist bekanntlich so eingerichtet, den eben gestellten Bedingungen Genüge zu leisten.



Es möge nun der Muskel die Schreibfeder von *a* gegen *E* bewegen, das Papier dagegen werde von *B* gegen *A* gezogen, so wird eine Curve *a c d* entstehen, nämlich *a c* während der Verkürzung und *c d* während der Ausdehnung des Muskels. Die Ordinate $b\,c = x$ entspricht der Grösse der Contraction, der Abscissenabschnitt $a\,b = y$ dagegen der zu dieser Contraction verwendeten Zeit. Derartige Curven gewähren aber über folgende Punkte Aufschlüsse:

1) In jedem besonderen Falle ist *bc* der absolute Werth der durch die Contraction vermittelten Muskelverkürzung, *a b* der Werth der Contractionsdauer und *b d* das Zeitmass der Expansion des Muskels.

2) Man erhält das Verhältniss $x : y$, oder das Verhältniss der Contractionsgrösse zu der für die Zusammenziehung erforderlichen Zeit.

3) Die Proportion $ab : bd$ ergiebt das Verhältniss der Dauer der Contraction zur Dauer der Expansion.

4) Die Gestalt der Curve im Allgemeinen giebt Aufschluss über den Gang der Contraction im Laufe der Zeit, und in wie fern die Contraction der Ausdruck der Muskelkraft ist, über die im Verlaufe der Zeit vor sich gehende Veränderung der Muskelkraft.

Die Physiologie darf sich von diesen Aufschlüssen um so mehr versprechen, als sich die Bedingungen, unter welchen die Muskelcurven gezogen werden, vervielfältigen lassen. Weiter: wie unterscheiden sich die Muskelcurven verschiedener Thiere, und wie gestalten sich die Verhältnisse, wenn zwei Muskeln

eines und desselben Thieres, aber von verschiedener Länge zu den Versuchen benutzt werden? Es kann nicht fehlen, dass Aufschlüsse über den letzten Punkt ein helles Licht über die Molecularbewegung in den Muskeln selbst verbreiten und zu manchen besser begründeten Ansichten über deren Functionen führen. Selbst die Frage nach dem Einfluss directer oder indirecter elektrischer Ströme gewinnt hier einen neuen, wie man erwarten darf, brauchbaren Angriffspunkt.

Natürlich sind Erfolge bei diesen Untersuchungen nur zu erwarten, wenn die Curven der unverfälschte Ausdruck der sie bedingenden Muskelkräfte sind, und *Helmholtz* fürchtet, dass dieser Ausdruck durch den Einfluss der Friction erheblich gestört werde. Bei meinem Apparate ist diese Furcht unbegründet.

Der wie im Kymographion vertical gestellte Cylinder wird mit dem feinsten Postpapier bespannt und angerusst. Auf dieses geschwärzte Papier malt eine Art Pinsel, dessen Spitze aus einem einzigen, 2 Millimeter langen Menschenhaare besteht. Dieser Pinsel ist unter einem rechten Winkel an ein 0,96 Gr. schweres prismatisches Stäbchen befestigt, welches sich in einer geeigneten Führung bewegt und dessen Längenaxe mit der des Cylinders parallel läuft. Durch die Contraction des Muskels wird das Stäbchen gehoben, das Haar schleift am Papiere und das Stäbchen selbst an den Wandungen seiner Führung, es fragt sich also: in wie weit dieses doppelte Frictionsmoment die Bewegung des die Curve zeichnenden Pinsels retardire? Diese Frage lässt sich auf folgende Weise lösen:

Man bindet einen Zwirnfaden an das obere Ende des Stäbchens, zieht es an diesem Faden in seiner Führung in die Höhe und knüpft nun den Faden an einem über der Führung befindlichen Querstab so an, dass, wenn der Faden durchgeschnitten wird, das Stäbchen herabfällt. Jetzt wird der Cylinder in Bewegung gesetzt, und sobald diese eine gleichmässige Geschwindigkeit erlangt hat, wird der Faden durchgebrannt. Gesetzt nun, es fände keine Friction statt, so müsste eine Parabel entstehen, deren Ordinaten sich nach der Formel $H = t^2 g$ berechnen liessen. Findet dagegen Friction statt, so muss zwar ebenfalls eine Parabel entstehn, allein die Ordinaten werden kleiner ausfallen, als beim freien Falle, denn das durch die Friction zurückgehaltene Stäbchen würde in derselben Zeit nicht so weit herunter sinken, als das im freien Falle herabstürzende. Nennen wir die grossen Ordinaten, bei freiem Falle, H, die kleineren, unter dem Einflusse

der Friction entstandenen, h, so ist $H = mh$, und es kann nun auf dem Wege des Versuchs der Coëfficient m gesucht werden. Derselbe fand sich

bei nicht belastetem Stäbchen	= 1,143
bei Belastung mit 3 Gramm.	= 1,081
,, ,, 5 ,,	= 1,052
,, ,, 10 ,,	= 1,008

d. h. also: die durch die Reibung verursachte Verzögerung der Bewegung nimmt in rascher Progression ab, wenn die Kraft, welche die Adhäsion des Stäbchens überwindet, zunimmt.

Schon wenn letztere Kraft = 10 Gr. ist, wird die Verzögerung überaus geringfügig, da aber ein äusserst kleiner Muskel, wie der *gastrocnemius* des Frosches, nicht mit 10 Gr., sondern mit 500 Gr. Zugkraft der Adhäsion entgegen arbeitet, so kann in Versuchen mit Muskeln von dem Einflusse der Friction unbedenklich abstrahirt werden.

Hiernach durften die Versuche mit den Muskeln selbst begonnen werden, bei welchen die Hauptschwierigkeit darin besteht, sich Reize von kürzester Dauer und von bekannter und unveränderlicher Stärke zu verschaffen. Indem es mir noch nicht gelungen ist, diese Schwierigkeiten nach Wunsche zu überwinden, sind die Resultate meiner bisherigen Beobachtungen noch ziemlich dürftig. Von hinreichendem Interesse dürfte indess die Erfahrung sein, dass die aufsteigenden Curven ohne Ausnahme Parabeln sind, deren Anfangspunkte im Scheitel der verzeichneten Wellen liegen. In vielen Fällen scheinen zwar die gefundenen Abscissen und Ordinaten sich unter die Formel der Parabel nicht fügen zu wollen, indess liegt dies nur daran, dass man sich gar zu leicht über den Scheitel der Curven und folglich über die Lage des Anfangspunktes täuscht. Benutzt man die gefundenen Werthe von x und y, um aus denselben den Anfangspunkt der Parabeln methodisch zu bestimmen, so ergiebt sich auf das Unzweifelhafteste, dass die vom Muskel verzeichneten Linien auf der Seite der aufsteigenden Curve wirklich Parabeln sind. Anders verhält es sich auf der Seite der Absteigung, wie der Augenschein unmittelbar lehrt. Die sinkende Curve erscheint nämlich in ihrer ersten Hälfte convex nach oben, in ihrer zweiten dagegen convex nach unten.

Anlangend die Parameter der erwähnten Parabeln, so sind sie abhängig von der Grösse der zu hebenden Gewichte und wachsen mit dieser. Eben so scheinen sie von der Ermüdung

abhängig zu sein und wiederum mit dieser zu wachsen. Erwägt man, dass $y^2=px$ und dass y in meinen Curven der Abscissenaxe entspricht, so folgt hieraus, dass die Geschwindigkeit der Contraction mit vermehrter Belastung und zunehmender Ermüdung abnehme.

Dies durfte im Voraus erwartet werden, weniger voraus zu sehen war die Form der Curve. Der parabolische Gang der aufsteigenden Linie beweist, dass die Muskelcontraction eine gleichmässig verlangsamte Bewegung ist. Auf die übrigen Fragen, welche das Kymographion zu lösen verspricht, hoffe ich bald zurückkommen zu können; hier nur noch die Bemerkung, dass im unbelasteten Froschmuskel die Dauer der Contraction sehr viel geringer als die der Expansion, und die Geschwindigkeit der ersten überraschend klein ist. Im Gastrocnemius dauerte die Zusammenziehung beinahe $^1/_{10}$ Secunde; in dieser Zeit verkürzte sich der Muskel um 4 bis 5 Millimeter, es betrug also die Geschwindigkeit der Muskelcontraction noch nicht 50 Millimeter auf 1 Secunde.

SITZUNG AM 22. FEBRUAR.

Erdmann, *Ueber eine merkwürdige Structurveränderung bleihaltigen Zinnes.*

Bei einer Reparatur der alten Orgel in der Schlosskirche zu Zeitz, welche der Angabe nach aus dem 17. Jahrhunderte herrührt, fand der Orgelbauer Hr. *Böhme* die im Prospect stehenden Pfeifen des Principals zum Theil mit eigenthümlichen blatterartigen Auftreibungen bedeckt. Die Pfeifen waren bereits herausgenommen, zerschnitten und grossentheils eingeschmolzen, als Hr. Dr. *Grebel*, Oberlehrer der Mathematik am dortigen Gymnasium, von der Sache Kenntniss erhielt. Indessen bekam derselbe noch ein etwas über 4 Fuss langes Stück der Pfeife *dis* aus der grossen Octave zu sehen, welches ringsherum mit mehr als 50 dergleichen aufgetriebenen Stellen bedeckt war, die ohne Ordnung, jedoch ziemlich gleichmässig vertheilt standen und von verschiedener Grösse, von der eines Silbergroschens bis zu der

eines Thalers waren. Die aufgetriebenen Stellen waren blind und die Masse derselben durchaus krystallinisch und so bröcklig, dass die meisten schon beim Herausnehmen zerbrochen waren. Herr Dr. *Grebel* hat die besterhaltenen mit einem Theile der Umgebung herausschneiden und mir zukommen lassen, wobei die meisten Auftreibungen allerdings verletzt wurden, einige aber ziemlich vollkommen sich erhalten haben. Ausserdem verdanke ich ihm eine Partie von Bruchstücken von der Masse der zerstörten Auftreibungen. Herr Dr. *Grebel* theilt mir dabei mit, dass an der Pfeife mehrere ausgebesserte Stellen sich befanden, aus deren Grösse und Gestalt sich schliessen liess, dass die Pfeife schon früher einmal von ähnlichen Auftreibungen durch die Reparatur befreit worden ist.

Da die Auftreibungen sämmtlich von innen nach aussen sich so erheben, dass der Convexität auf der äussern Seite der Pfeife eine Concavität auf der innern entspricht und man also an einen Druck des Windes bei ihrer Entstehung denken könnte, so ist besonders zu erwähnen, dass sie am Körper der Pfeife, oberhalb des Labiums, vorkommen, in den bekanntlich kein Wind tritt. Die Ursache, dass die Auftreibung nach aussen erfolgte, liegt wohl darin, dass bei einer im Gefüge des Metalles eintretenden Veränderung das Volumen sich vergrösserte und die Masse sich nach der Seite des geringsten Widerstandes, also nach der convexen Seite der Pfeife erhob. Uebrigens erhielt ich später durch Herrn *Böhme* noch einige kleine Pfeifen der Orgel, an welchen der ganze Fuss bis auf eine kleine Entfernung vom Labium mit kleinen Pusteln dicht bedeckt erscheint und durch die ganze Masse krystallinisch und brüchig geworden ist, so dass sie kaum die geringste Biegung verträgt, ohne zu brechen. Am Labium und oberhalb desselben war das Metall geschmeidig.

Um die ganze äussere Erscheinung und die Beschaffenheit des Bruches der zuersterwähnten aufgetriebenen Stellen zu bezeichnen, brauche ich nur zu bemerken, dass sie mir beim ersten Anblicke den Gedanken erregten, es möge irgendwie Quecksilber an den aufgetriebenen Stellen in das Metall eingedrungen sein und ein krystallinisches Amalgam gebildet haben. Die gleich flachen Blasen erhobenen krystallinischen Stellen erscheinen matt und von röthlich bleigrauer Farbe auf dem weissen glänzenden Grunde des Zinnes. Sie zeigen eine vollkommen scharfe, fast kreisrunde, doch etwas ausgezackte Begrenzung. Einige der aufgetriebenen Stellen berühren sich im Umfange und ver-

fliessen zu einer einzigen. Der Scheitel der Auftreibung erhebt sich bei der grössten der mir vorliegenden ganz erhaltenen von etwa 1½ Zoll Durchmesser ohngefähr um ½ Zoll über die unveränderte Zinnfläche. Vom Scheitel nach dem Umfange verlaufen stärkere und feinere Risse, die oben weiter sind, aber wohl erst bei der Herausnahme und Versendung entstanden sein mögen; die meisten Ausbauchungen sind oben eingebrochen, so dass mehr oder weniger weite Löcher in der Masse der aufgetriebenen Stellen entstanden sind, auf welche die Spitzen der stehen gebliebenen, durch die Risse gebildeten keilförmigen Absonderungen gerichtet erscheinen. Im Bruche erscheint die Masse der veränderten Stellen zinnweiss, krystallinisch, glänzend. Unter dem Mikroskope sind keine bestimmten Formen darin zu erkennen, nur eine durchaus schuppig krystallinische Structur.

Zum Theil hat sich die krystallinische Masse in zwei Platten, parallel den Oberflächen, getrennt, indem sich die äussere Fläche etwas weiter ausgebaucht hat als die innere. Die krystallinische Masse ist so zerbrechlich, dass sie mit Leichtigkeit aus der dehnbaren Umgebung des unveränderten Metalles durch den Druck des Fingers sich herausbrechen und bis zu einem gewissen Grade zerbröckeln lässt. Kleinere Fragmente, in welchen keine Risse vorhanden sind, lassen sich schwerer zerbrechen und zeigen auch eine gewisse Biegsamkeit.

Die beschriebene Beschaffenheit des Zinnes konnte vielleicht durch irgend eine chemische Einwirkung entstanden sein, und in diesem Falle war zu erwarten, dass durch vergleichende Analysen des veränderten und des unveränderten Metalles die Art der stattgehabten Einwirkung sich würde ermitteln lassen. Ich habe deshalb einen Theil des vollkommen unveränderten Metalles einer Pfeife, so wie die krystallinische Masse einer darauf befindlichen Auftreibung analysirt. Ausser Zinn und Blei liessen sich in beiden nur Spuren von Eisen nachweisen.

1) 2,0065 Gr. des ductilen Metalles gaben mit Salpetersäure behandelt 2,459 Gr. Zinnoxyd = 1,933 Gr. Zinn und durch Behandlung der vom Zinnoxyde getrennten Flüssigkeit mit Oxalsäure und Ammoniak u. s. w. 0,082 Gr. Bleioxyd = 0,076 Gr. Blei (Summe: 2,009). In 100 Theilen der Legirung waren also enthalten:

96,23	Zinn
3,77	Blei
100,00	

2) Die krystallinische Masse wurde durch Erwärmen mit sehr verdünnter Essigsäure und dann mit sehr verdünntem Kali von allem etwa anhängenden und in die Risse eingedrungenen Staube und dem Anlaufe gereinigt. Die Essigsäure nahm dabei höchst geringe Spuren von Blei auf. Die Farbe der Masse wurde durch diese Behandlung fast rein silberweiss. Beim Erhitzen vor dem Löthrohre schmolz sie übrigens und erschien nun vollkommen ductil.

2,957 Gr. der krystallinischen Masse gaben 3,623 Gr. Zinnoxyd = 2,8481 Gr. Zinn und 0,120 Gr. Bleioxyd = 0,1113 Gr. Blei (Summe: 2,9594). In 100 Theilen waren also enthalten:

96,31 Zinn
3,69 Blei.

Hiernach hat die krystallinische Masse, besonders wenn man berücksichtigt, dass Spuren von Bleioxyd ihr durch die Essigsäure entzogen worden waren, dieselbe Zusammensetzung als die ductile Legirung. Wenigstens fallen die kleinen Abweichungen zwischen beiden Analysen innerhalb der Grenzen der Versuchsfehler.

Es liegt demnach der Bildung jener Auftreibungen nur eine Structurveränderung zu Grunde, deren Ursache vielleicht in den Erzitterungen zu suchen ist, welche das Metall der Orgelpfeifen zu erleiden hat. Welcher begünstigende Umstand dahin gewirkt hat, dass gerade nur an einzelnen Stellen des Metalles das Krystallinischwerden eintrat, während dicht daneben das Metall ductil blieb, wird sich schwer ermitteln lassen und ich wage darüber keine Vermuthung. Jedenfalls dürfte aber die mitgetheilte Beobachtung nicht ohne Interesse in Bezug auf das von einigen Technikern noch immer bezweifelte Krystallinischwerden von eisernen Achsen, Radreifen u. s. w. sein, wenn dieselben, wie beim Eisenbahnbetriebe, fortwährenden Erschütterungen ausgesetzt sind.

Derselbe. *Mittheilung über Wagner's Untersuchung der Moringerbsäure und ihrer Zersetzungsproducte.*

Wie aus einer früheren Arbeit des Dr. *Wagner*, Assistenten am Laboratorium des Prof. *Erdmann*, hervorgeht, findet sich in dem Gelbholze (*Morus tinctoria*) eine eigenthümliche Gerb-

säure, die sich von allen bis jetzt bekannten Gerbsäuren durch ihre Krystallisirbarkeit, durch ihre Eigenschaft gelb zu färben, durch ihr Verhalten zu essigsaurem Bleioxyd unterscheidet. Die Zusammensetzung dieser Säure, die mit dem Namen Moringerbsäure bezeichnet wurde, wird durch die Formel $C_{18}H_8O_{10}$ repräsentirt. Sie scheint in ihren Salzen sich der Eichengerbsäure ähnlich zu verhalten und eben so wie die letztere eine dreibasische Säure zu sein, so dass ihre eigentliche Formel $C_{18}H_5O_7 + 3HO$ sein würde.

I. Wenn man die Moringerbsäure in einer Retorte über mässigem Feuer erhitzt, so zersetzt sie sich in Kohlensäure, eine überdestillirende, farblose, ölähnliche Flüssigkeit und in zurückbleibende voluminöse Kohle. Die übergegangene farblose Flüssigkeit erstarrt nach kurzer Zeit zu einer krystallinischen Masse, die den Geruch nach phenyliger Säure (Carbolsäure) besitzt und durch Pressen zwischen Fliesspapier von anhängendem nicht krystallisirbarem Oel befreit werden kann. Eine grössere Ausbeute wird von dieser Säure erhalten, wenn man die Moringerbsäure, mit einem gleichen Volumen Quarzsand gemengt, in einer Retorte bei gelinder Hitze destillirt. Die nach dem Erstarren der übergegangenen Flüssigkeit erhaltenen Krystalle lassen sich durch Sublimation reinigen. Sie bilden dann eine strahlig krystallinische, vollkommen weisse, ziemlich harte Masse, welche die Eigenschaften einer Säure besitzt, die vorläufig mit dem Namen Brenzmoringerbsäure bezeichnet wird.

Diese Säure hat folgende Eigenschaften: sie löst sich leicht in Wasser, leichter in Alkohol, schwerer in Aether. Aus der concentrirten wässerigen Lösung scheidet sie sich in kleinen, glänzenden, geraden, vierseitigen Prismen mit zweiflächigen Zuspitzungen aus. Die aus Wasser krystallisirte Säure reagirt nur sehr schwach sauer; sie schmeckt kühlend und bitterlich und erinnert an phenylige Säure. Die wässerige Lösung reducirt Goldchlorid, Salpetersäure, Silberoxyd und Platinchlorid, verändert Eisenoxydulsalze nicht und giebt mit Eisenchlorid oder Eisenoxydul-Oxydlösung eine dunkelgrüne Färbung, die auf Zusatz von Ammoniak, Kali oder Barytwasser in eine purpurrothe übergeht. Die Lösung der Säure in Kali oder Ammoniak wird an der Luft unter Sauerstoffaufnahme grün, dann braun und nach kurzer Zeit undurchsichtig und schwarz; ähnlich verhält sich die Säure, mit Lösungen von kohlensauren Alkalien zusammengebracht. Lässt man einen Tropfen der concentrirten

wässerigen Lösung in Kalkmilch fallen, so entsteht keine purpurrothe Färbung, wie es bei der Pyrogallussäure nach *Stenhouse* der Fall ist, sondern die Flüssigkeit nimmt eine lebhaft grüne Färbung an, die bald in Braun übergeht. Wird Fichtenholz mit einer Lösung der Säure getränkt und nach dem Befeuchten mit verdünnter Chlorwasserstoffsäure dem Sonnenlichte ausgesetzt, so nimmt das Holz eine schwach violette Färbung an; je reiner die angewendete Säure ist, desto schwächer tritt die Färbung ein. Die Holzreaction, die namentlich in der neuesten Zeit vielfach zum Erkennen der phenyligen Säure angewendet worden ist, giebt keineswegs zuverlässige Resultate, da von dem Prof. *Lehmann* und Andern beobachtet worden ist, dass manche Stücke von Fichtenholz nach dem Befeuchten mit Chlorwasserstoffsäure vom Sonnenlichte gebläut werden.

Die wässerige Lösung der Brenzmoringerbsäure giebt mit unterchlorigsauren Alkalien einen schwarzen Niederschlag, eben so verhält sich zweifach chromsaures Kali. Salpetersäure und schweflige Säure lassen die wässerige Lösung unverändert. Sie giebt mit Leimlösung, mit Brechweinstein und mit Chinin keinen Niederschlag.

Bei 80° getrocknete Krystalle schmelzen bei 100°; die geschmolzene Masse fängt bei 130° an zu verdampfen und kommt zwischen 240—245° in lebhaftes Sieden. Die Dämpfe sind farblos und condensiren sich zu einer wasserhellen Flüssigkeit, die den Hals der Retorte bald mit prächtigen Krystallvegetationen bedeckt. Mit neutralem essigsauren Bleioxyd giebt die wässerige Lösung der Brenzmoringerbsäure einen weissen Niederschlag, der in Wasser unlöslich ist und aus einer Verbindung der Pyrosäure mit Bleioxyd besteht.

Es stellte sich bei der Analyse heraus, dass die Zusammensetzung der freien Säure durch $C_{12}H_6O_4$ ausgedrückt werden muss. Das Bleisalz hat die Formel $C_{12}H_4O_2,2PbO$.

Diese neue Säure hat grosse Aehnlichkeit mit der Pyrogallussäure, sie unterscheidet sich aber von der letzteren durch zwei Aequiv. Sauerstoff, die sie weniger enthält, durch ihr Verhalten zu Eisenoxyd und zu Kalkmilch. Eben so wie die Pyrogallussäure aus der Eichengerbsäure entsteht, eben so bildet sich die Brenzmoringerbsäure aus der Moringerbsäure, denn:

$C_{18}H_8O_{12}$	Eichengerbsäure	$C_{18}H_8O_{10}$	Moringerbsäure
$C_{12}H_6O_6$	Pyrogallussäure	$C_{12}H_6O_4$	Brenzmoringerbsäure
$C_6H_2O_6$		$C_6H_2O_6$	



Die Brenzmoringerbsäure ist isomer mit dem Brenzcatechin *Zwenger's*, polymer mit dem farblosen Hydrochinon *Wöhler's* und steht ferner hinsichtlich ihrer Formel in naher Beziehung zu den Formeln der Japonsäure $C_{12}H_4O_4$ und des damit isomeren Chinons, der Rubinsäure $C_{12}H_4O_6$ und der ebenfalls mit dieser isomeren Chinonsäure (Melansäure). Ausserdem ist diese Säure homolog mit dem Saligenin $C_{14}H_8O_4$. Vor Allem ist aber die Aehnlichkeit der Formel der Brenzmoringerbsäure mit denen der Pyrogallussäure und der phenyligen Säure hervorzuheben, denn:

$C_{12}H_6O_2$ = phenylige Säure
$C_{12}H_6O_4$ = Brenzmoringerbsäure
$C_{12}H_6O_6$ = Pyrogallussäure.

Eben so wie die phenylige Säure (das Salicon von *Gerhardt* und *Stenhouse*) aus der Salicylsäure ($C_{14}H_6O_6 - 2CO_2 = C_{12}H_6O_2$) und die Pyrogallussäure aus der Gallussäure ($C_{14}H_6O_{10} - 2CO_2 = C_{12}H_6O_6$) entsteht, ebenso lässt sich voraussehen, dass die Boheasäure *Rochleder's* Brenzmoringerbsäure geben wird, denn:

$$\begin{array}{r} C_{14}H_6O_8 \\ \text{minus } C_2 \quad O_4 \\ \hline C_{12}H_6O_4. \end{array}$$

Bei der Destillation der Moringerbsäure behufs der Darstellung der Pyrosäure ist stets die Gegenwart von phenyliger Säure zu bemerken. Da sich nun die Brenzmoringerbsäure hinsichtlich ihrer Sauerstoffaequivalente zur phenyligen Säure verhält, wie die Essigsäure zur acetyligen Säure, so kann man die Brenzmoringerbsäure als Phensäure betrachten. Sie wird von nun an auch mit diesem Namen bezeichnet.

Kolbe's Ansicht zu Folge ist die Benzoesäure eine gepaarte Säure, bestehend aus Phenyl $C_{12}H_5$ und Oxalsäure C_2O_3,HO. Nimmt man eine analoge Constitution für die Phensäure an, so ist diese letztere ebenfalls Oxalsäure, gepaart mit dem Kohlenwasserstoffe $C_{10}H_5$ (Phenylen). Die rationelle Formel der Phensäure wäre demnach:

$$C_{10}H_5 = C_2O_3,HO.$$

Leider ist der leichten Zersetzbarkeit wegen das Ammoniaksalz der Phensäure nicht darstellbar, sonst könnte man dasselbe benutzen, um die Constitution der Phensäure darzuthun. Mit wasserfreier Phosphorsäure destillirt würde dieses Salz das Nitril

$C_{12}H_5N$ geben, welches höchst wahrscheinlich Cyanphenylen $C_2N+C_{10}H_5$ sein würde:

$$C_{12}H_5O_3,NH_4O-4HO=C_{12}H_5N.$$

St. Evre sagt in einer Abhandlung »über die Einwirkung des Chlors auf benzoesaures Kali«, dass, wenn es gelingen sollte, die Säure $C_{12}H_6O_4$ darzustellen, die Möglichkeit gegeben wäre, das Nicotin $C_{10}H_7N$ auf künstlichem Wege zu erhalten.

Und in der That, nachdem *Zinin* durch die Darstellung des Anilins (Benzidams) aus dem Nitrobenzol die Bahn gebrochen und aus den entsprechenden Nitroverbindungen die Basen Anisidin, Cumidin, Naphthalidin, Toluidin u. s. w. dargestellt worden waren, lag es nahe, an eine ähnliche Darstellung des Nicotins zu denken.

Der Versuch bestätigte indessen die gehegte Erwartung nicht; denn als der Verf. Phensäure mit überschüssigem Baryt oder Kali destillirte, erhielt derselbe keinen Kohlenwasserstoff, sondern unveränderte Phensäure.

Die Phensäure hat demnach das mit der phenyligen Säure, dem Anisol und ähnlichen Verbindungen gemein, dass ihr Sauerstoff nicht in Form von Kohlensäure beim Erhitzen mit überschüssigen Alkalien austritt.

Der Verfasser macht schliesslich noch auf einige ausgezeichnete Reactionen der Phensäure aufmerksam, namentlich, dass dieselbe als ausgezeichnetes Reagens auf Eisenoxyd, welches an Empfindlichkeit dem Rhodankalium nicht nachsteht, und auf freie oder kohlensaure Alkalien und alkalische Erden anzuwenden sei. Eine mit Kali versetzte Lösung von Phensäure äussert gegen Sauerstoff ein so kräftiges Absorptionsvermögen, dass diese Lösung ebenso wie eine ähnliche von Pyrogallussäure zu eudiometrischen Versuchen benutzt werden kann.

II. Wenn man gepulverte Moringerbsäure mit concentrirter Schwefelsäure mischt, so erhält man eine braungelbe Lösung, die allmälig in eine dunkelrothe übergeht. Aus letzterer setzt sich beim längeren Stehen eine ziegelrothe körnige Masse ab, welche durch Behandeln mit kaltem Wasser von dem grössten Theile der Schwefelsäure befreit werden kann. Um die rothe Substanz aber rein zu erhalten, verdünnt man die saure rothe Flüssigkeit mit Wasser, neutralisirt dieselbe genau mit kohlensaurem Natron, setzt darauf einige Tropfen Essigsäure hinzu und fällt die rothe Substanz durch eine siedende Lösung von neutralem essigsauren Kupferoxyd. Der rothbraune, voluminöse,

aus dem Kupfersalze der rothen Säure bestehende Niederschlag wird in Wasser suspendirt und mit Schwefelwasserstoff zersetzt. Die freigewordene rothe Substanz befindet sich zum kleinen Theil in der Lösung, der grösste Theil ist dem Schwefelkupfer adhärirend, welchem sie durch Digestion mit siedendem Alkohol entzogen wird. Die alkoholische Lösung wird zur Trockne verdampft oder, nachdem sie durch Abdampfen concentrirt worden ist, mit Wasser gemischt, wodurch sich die rothe Substanz in Flocken ausscheidet.

Die so erhaltene Masse erscheint nach dem Trocknen roth mit grünem Glanze, dem Hämatein *Erdmann's* nicht unähnlich. Beim Zerreiben giebt sie ein dunkelrothes Pulver; sie löst sich schwer in Wasser, leicht in Alkohol, wenig in Aether; die Lösungen sind von weinrother Farbe mit einem Stich ins Gelbliche und reagiren kaum wahrnehmbar sauer. In concentrirter Schwefelsäure löst sich die rothe Substanz, die ich vorläufig mit dem Namen Rufimorinsäure bezeichne, mit purpurrother Farbe und ist aus dieser Lösung zum Theil durch Wasser fällbar. Durch die geringste Menge eines ätzenden oder kohlensauren Alkali's nimmt die Rufimorinsäure eine prächtig carminrothe Färbung an und löst sich dann leicht in Wasser zu einer Flüssigkeit von derselben Farbe. Durch Alaunlösung entsteht in der wässerigen Lösung kein Niederschlag, nach Zusatz von Ammoniak zur alaunhaltigen Lösung ein purpurrother Lack; Zinnchlorür und Chlorbaryum verhalten sich eben so; neutrales essigsaures Bleioxyd giebt einen dunkelkirschrothen Niederschlag; essigsaures Kupferoxyd einen bronzefarbenen; salpetersaures Silberoxyd und schwefelsaures Zinkoxyd bewirken keinen Niederschlag; salpetersaures Quecksilberoxydul einen braunrothen, salpetersaures Quecksilberoxyd einen röthlichen Niederschlag; Eisenchlorid bewirkt eine dunkelbraune Färbung, keinen Niederschlag. Eine alkoholische Lösung der Rufimorinsäure wird durch eine alkoholische Aetzkalilösung gefällt. Der Niederschlag ist dunkelroth. Vergleicht man diese Eigenschaften mit den von *Warren de la Rue* für die Carminsäure angegebenen, so wird man finden, dass beide Körper so ähnlich sind, dass man beide für identisch halten möchte. Die Verschiedenheit in Bezug auf die Löslichkeit in Wasser kann darin ihren Grund haben, dass *Warren de la Rue* die Carminsäure nicht vollkommen von Ammoniak befreien konnte, während die Rufimorinsäure durch die kleinste Menge eines Alkalis leicht löslich in Wasser wird. Die Analyse

der Säure, sowie die ihrer Salze ist wegen des Nichtkrystallisirens dieser Körper mit grossen Schwierigkeiten verknüpft. Die Elementaranalyse zeigte, dass der Rufimorinsäure die Formel $C_{14}H_7O_8$ zukommt, welche Formel *De la Rue* auch für die Carminsäure aufgestellt hat. Beim Erhitzen der Rufimorinsäure entwickelte sich eben so wie aus der Moringerbsäure Phensäure.

Derselbe. *Ueber die Pyromellithsäure.*

Man hat bisher angenommen, dass die Mellithsäure bei höherer Temperatur zum Theil unverändert sublimire. Dies ist jedoch nicht der Fall. Das beim Erhitzen der Mellithsäure sich bildende Sublimat ist eine neue aus Kohlenstoff und Sauerstoff bestehende Säure, welcher ich den Namen Pyromellithsäure gegeben habe. Um die grösste Menge derselben zu erhalten, muss man freie Mellithsäure sehr langsam aus einer Retorte destilliren. Das sich bildende Sublimat schmilzt und fliesst in ölartigen farblosen Tropfen in den Hals der Retorte ab, wo es zu einer weissen strahlig krystallinischen Masse erstarrt. In der Retorte bleibt Kohle zurück, deren Menge um so grösser ist, je rascher man erhitzt hat. Mit der Pyromellithsäure geht Wasser über. Die bei der Destillation sich bildenden Gase bestehen grösstentheils aus Kohlensäure, welche von einer mit Ammoniak versetzten Lösung von Chlorbaryum bis auf einen kleinen Rest verschluckt wird, der angezündet mit blauer Flamme wie Kohlenoxydgas verbrennt.

Eine andere Darstellungsweise der Mellithsäure, welche sich auf die Unzersetzbarkeit der Säure durch Schwefelsäure gründet, besteht darin, dass man mellithsaure Salze, z. B. mellithsaures Natron oder mellithsaures Kupferoxyd, mit concentrirter Schwefelsäure bei allmälig gesteigerter Temperatur destillirt. Die Pyromellithsäure destillirt mit Schwefelsäure über, von welcher sie leicht durch Krystallisiren getrennt werden kann. Bei der Destillation entwickelt sich viel Kohlensäure, etwas Kohlenoxydgas und zuletzt schweflige Säure. In der Retorte bleibt, wenn die Hitze am Schlusse bis zum Glühen gesteigert worden ist, das schwefelsaure Salz der Basis des angewandten Salzes ohne Beimengung von Kohle zurück.

Die Pyromellithsäure ist in kaltem Wasser wenig, in heissem reichlich löslich, daher sie durch Umkrystallisiren aus Wasser gereinigt werden kann. Um sie vollkommen rein zu erhalten, ist es am besten, die Säure an Natron zu binden und das reine Natronsalz durch Salpetersäure oder Salzsäure zu zersetzen. Die wässerige Lösung der Säure besitzt eine stark saure Reaction und sehr sauren Geschmack. Aus der heissgesättigten Lösung krystallisirt die Säure in farblosen glänzenden Tafeln, welche nach Hrn. Prof. *Naumann's* Bestimmung dem triklinoëdrischen Systeme angehören. Die Beschreibung und Abbildung der Krystalle wird in dem Journ. f. praktische Chemie mitgetheilt werden.

In Alkohol ist die Pyromellithsäure sehr auflöslich. Von Salpetersäure, Salzsäure und concentrirter Schwefelsäure wird die Pyromellithsäure im Sieden gelöst, ohne eine Zersetzung zu erleiden. Durch Wasser wird die Säure aus ihrer Lösung in Schwefelsäure gefällt. Selbst eine Mischung von Salpetersäure und Salzsäure kann von der Säure abgeraucht werden, ohne sie zu zersetzen.

Beim Erhitzen schmilzt die Pyromellithsäure und sublimirt. Es ist dazu eine ziemlich hohe Temperatur erforderlich. Ein kleiner Theil wird dabei zersetzt und hinterlässt Kohle. Beim Erhitzen an der Luft entzündet sich die geschmolzene Säure und brennt mit leuchtender, russender Flamme.

Die wässerige Lösung der Säure giebt mit neutralem essigsauren Bleioxyd einen weissen Niederschlag, mit den Lösungen anderer Salze giebt sie keine Fällungen.

Mit den Alkalien bildet sie krystallisirbare, in Wasser leicht lösliche, in starkem Alkohol unlösliche, in schwachem wenig lösliche farblose Salze. Die Lösungen dieser Salze, namentlich des Ammoniak- und Natronsalzes, zeigen folgende Reactionen.

Chlorbaryum giebt einen weissen, in siedendem Wasser unlöslichen Niederschlag.

Chlorcalcium erzeugt Anfangs in der Kälte keinen Niederschlag. Später entsteht eine krystallinische Fällung von pyromellithsaurem Kalk. Beim Erhitzen bildet sich der krystallinische Niederschlag sogleich. In siedendem Wasser ist er unauflöslich.

Schwefelsaures Kupferoxyd giebt in verdünnten Lösungen sogleich keinen Niederschlag, beim Erhitzen trübt sich die Flüssigkeit und es entsteht eine krystallinische Fällung von pyromellithsaurem Kupferoxyd. Bei langem Stehen scheidet sich

das Salz auch ohne Erhitzen allmälig in kleinen grünen Krystallen ab, die in siedendem Wasser unlöslich sind. Concentrirte Lösungen geben sogleich einen grünlichen pulverigen Niederschlag.

Essigsaures Bleioxyd bewirkt eine weisse, voluminöse, krystallinische Fällung, die in siedendem Wasser unlöslich ist.

Salpetersaures Silberoxyd giebt einen krystallinischen weissen Niederschlag, der in siedendem Wasser fast unlöslich ist. Beim Auswaschen mit Wasser geht er leicht milchig durch's Filter. Das pyromellithsaure Silberoxyd wird am Lichte nicht verändert. Beim Erhitzen brennt es mit Heftigkeit ab und hinterlässt eine voluminöse Kohle, die bei fortgesetztem Erhitzen an der Luft mit Hinterlassung von höchst fein zertheiltem Silber verbrennt.

Schwefelsaures Zinkoxyd giebt in der Kälte sofort keinen Niederschlag. Nach längerem Stehen, so wie beim Erhitzen der Flüssigkeit scheidet sich ein krystallinischer Niederschlag ab.

Eisenchlorid giebt einen braungelben Niederschlag.

Schwefelsaures Eisenoxydul giebt bei abgehaltener Luft keinen Niederschlag.

Schwefelsaures Nickeloxydul und schwefelsaures Kobaltoxydul geben keine Niederschläge; beim Verdunsten der Flüssigkeit entstehen kleine Krystalle des Nickeloxydul- und Kobaltoxydulsalzes, erstere von grüner, letztere von rother Farbe.

Schwefelsaures Manganoxydul giebt keine Fällung.

Quecksilberchlorid erzeugt keine Veränderung.

Salpetersaures Quecksilberoxydul und salpetersaures Quecksilberoxyd geben weisse Niederschläge.

Goldchlorid bringt keine Fällung hervor.

Die Zusammensetzung und das Aequivalent der Pyromellithsäure wurden durch die Analyse des Silbersalzes, des Kalksalzes und der krystallisirten Säure ermittelt.

Bei Bereitung der unlöslichen Salze mittelst des Ammoniaksalzes der Pyromellithsäure geschieht es leicht, dass das Product, wie dies auch bei Bereitung der mellithsauren Salze der Fall ist, etwas Ammoniaksalz einschliesst. In Folge dieses Umstandes gaben meine ersten Versuche zur Bestimmung des Aequivalents und der Zusammensetzung der Säure durch die Analyse des Silbersalzes kein genaues Resultat. Es ergab sich, dass das

angewandte Präparat ammoniakhaltig war. Als statt des Ammoniaksalzes pyromellithsaures Natron angewendet wurde, fand sich dagegen Natron im Salze. Man vermeidet diese Beimengung, wenn man nach dem von *Schwarz* bei Bereitung der unlöslichen mellithsauren Salze angewendeten Verfahren das pyromellithsaure Salz in eine siedende Lösung von überschüssigem salpetersauern Silberoxyd eingiesst.

1) 1,4825 Gr. nach diesen Vergleichen bereitetes Salz, bei 120° im Vacuo getrocknet, in Salpetersäure gelöst und mit Salzsäure gefällt, gaben 1,247 Gr. Chlorsilber = 1,0083 Silberoxyd = 68,01 p. C. Hieraus ergiebt sich als Aequivalent der Säure = 54,4 (H = 1).

2) 1,4365 Gr. Silbersalz, durch Zusatz von salpetersauerm Silberoxyd zu pyromellithsauerm Natron erhalten, welches eine Spur Natron enthielt, gaben bei der Verbrennung

0,934 Gr. Kohlensäure = 0,2547 C
0,040 ,, Wasser = 0,004 H.

3) 1,547 Gr. gaben 1,010 Gr. Kohlensäure = 0,275 Gr. C. Die kleine Menge Wasser, welche sich zeigte, konnte in Folge eines Zufalls nicht gewogen werden.

Hiernach kann die Zusammensetzung der Pyromellithsäure durch die Formel C_5O_3 = 54 ausgedrückt werden.

		In 100 Th. ber.	gef.
C_5 =	30	17,7	17,73—17,77
O_3 =	24	14,1	13,98
AgO =	116	68,2	68,01.

Die bei der Analyse erhaltenen 0,004 Gr. Wasserstoff = 0,28 p. C. sind offenbar zufällig und gehören wahrscheinlich zum Theil dem anhängenden Natronsalze an. Enthielte die Säure, was bei ihrer Entstehung aus einer wasserstofffreien Säure durch Erhitzen kaum anzunehmen ist, 1 Aeq. Wasserstoff, so würden 100 Th. des Silbersalzes 0,58 p. C. desselben, also über das Doppelte der gefundenen Menge haben geben müssen. Aber selbst bei der Analyse eines Silbersalzes, in welchem Ammoniak nachgewiesen werden konnte, wurden nur 0,35 p. C. Wasserstoff und 17,48 p. C. Kohlenstoff erhalten. 2,706 Gr. dieses Silbersalzes gaben 0,090 Gr. Wasser und 1,735 Gr. Kohlenstoff.

Das Kalksalz bestätigte das gefundene Aequivalent. 0,613 Gr. des getrockneten Salzes gaben beim Erhitzen mit Schwefelsäure 0,505 Gr. schwefelsauern Kalk = 0,20793 Kalk = 33,92%.

Hieraus ergiebt sich die der berechneten sehr nahe stehende Zahl 54,5 für das Aequivalent der Säure.

Ferner habe ich auch die krystallisirte Pyromellithsäure analysirt.

0,965 Gr. krysstallisirte Säure gaben bei 100° 3,119 Wasser ab = 12,33 p. C.

0,846 Gr. der getrockneten Säure gaben bei der Verbrennung
0,179 Gr. Wasser = 0,0198 H = 2,34 p. C.
1,4665 » Kohlensäure = 0,3995 C = 47,27 »

Die getrocknete Säure ist hiernach C_5O_3+HO.

Diese Zusammensetzung giebt in 100 Theilen:

	ber.	gef.
C_5	47,6	47,27
H	1,59	2,34
O_4	50,8	50,39.

Enthielte die Säure ausser dem Hydratwasser 1 Aeq. Wasserstoff, so würde das Hydrat 3,12 p. C. Wasserstoff haben geben müssen.

Die krystallisirte Säure ist $C_5O_3,HO+HO$

	ber.	gef.
Wasser	12,36	12,33.

Einige Versuche, die Zusammensetzung der Säure aus dem Bleisalze zu bestimmen, gaben kein befriedigendes Resultat. Das Aeq. fiel um 5—6 Einheiten zu hoch aus und es zeigte sich, dass das bei sehr hoher Temperatur getrocknete Bleisalz noch Wasser enthielt. Ich hoffe durch einige weitere Versuche dieses Verhältniss aufzuklären.

Derselbe, *Ueber die Zähigkeit des Lebens der Tradescantia zebrina.*

Diese Pflanze scheint sich vorzugsweise zu Anstellung gewisser pflanzenphysiologischer Untersuchungen zu eignen, da sie von einer beispiellosen Zähigkeit des Lebens ist.

Ein abgeschnittener Zweig der Pflanze, welcher mit etwas Wasser in einen Glascylinder mit luftdicht aufgekitteter Deckplatte vor 8 Monaten gesetzt worden war, vegetirte an seinem oberen Theile fort, während die unteren Blätter abstarben. Ihre Zersetzungsproducte liefern die Nahrung für die fortwachsenden

Theile. Die Pflanze bildet unter solchen Umständen zahlreiche Luftwurzeln, welche sie ausserdem nicht zeigt. Bei einem früheren Versuche vegetirte ein Zweig mit etwas Wasser in eine weite Glasröhre eingeschmolzen 13 Monate fort. Der Verf. legte Blätter und Zweige der Pflanze vor, welche vor einem Jahre zerschnitten in einer Porzellanschale mit Papier bedeckt in einen Glasschrank zum Abtrocknen gesetzt worden waren. An mehreren Stellen zeigten die zerschnittenen Zweige noch frische Triebe mit grünen Blättern.

A. F. Möbius, *Ueber symmetrische Figuren.*

Seit dem im Sommer des Jahres 1849 von mir »über das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und über die Anwendung dieses Gesetzes auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme« gegebenen Berichte habe ich mich mehrfach mit der Symmetrie geometrischer Figuren überhaupt beschäftigt. Ich beabsichtige jetzt, von Dem, was ich in dieser Beziehung gefunden, Einiges im Auszuge mitzutheilen, will aber vorher noch bemerken, dass gleichzeitig mit jenem Berichte Herr Bravais in Paris über denselben Gegenstand eine sehr erschöpfende und in ächt geometrischem Geiste geschriebene Denkschrift*) veröffentlicht hat, die mir bei meinen späteren Untersuchungen, insonderheit rücksichtlich der von ihm mit dem Ausdrucke *polyèdres symétriques sphéroédriques* bezeichneten Figuren, von Nutzen gewesen ist.

Sowie jede Grösse sich selbst gleich ist, so ist auch jede Figur sich selbst gleich und ähnlich. Es giebt aber Figuren, welche sich selbst auf mehr als eine Art gleich und ähnlich sind, und solche Figuren sollen symmetrische genannt werden.**)

*) *Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique; par M. A. Bravais, professeur à l'école polytechnique.* [*Extrait du journal de mathématiques pures et appliquées, tome XIV.* 1849.]

**) Oder, wie ich mich früher ausgedrückt hatte: eine Figur soll symmetrisch heissen, wenn sie einer ihr gleichen und ähnlichen Figur auf mehr als eine Art gleich und ähnlich gesetzt werden kann. Berichte für 1849, Seite 67.

Von Herrn *Bravais* wird das Wesen der Symmetrie durch folgende Definitionen bestimmt:

Zwei Figuren heissen einander **gleich und ähnlich**, wenn jedem Punkte der einen Figur ein Punkt der andern dergestalt entspricht, dass der gegenseitige Abstand je zweier Punkte der einen Figur dem gegenseitigen Abstande der zwei entsprechenden Punkte der andern Figur gleich ist.

Dass zwei Systeme von Punkten

$$A, B, C, D, E \text{ und } M, N, O, P, Q$$

einander gleich und ähnlich sind, wobei je zwei gleichvielte Buchstaben der beiden Reihen, also A und M, B und N, C und O, u. s. w. einander entsprechende Punkte bezeichnen, dies wollen wir ausdrücken durch die Gleichung

$$ABCDE = MNOPQ,$$

oder besser noch durch

$$\begin{array}{l} ABCDE \\ = MNOPQ, \end{array}$$

indem bei letzterer Form die einander entsprechenden Punkte über einander stehen, und man somit ungleich leichter, als bei der erstern Form, wahrnimmt, wie die Punkte des einen und des andern Systems als einander entsprechend zusammengehören. So ersieht man z. B. aus letzterer Form auf den ersten Blick, dass die Linien BD und NP gleiche Länge haben; dass die Winkel ACE und MOQ von gleicher Grösse sind; dass, jenach-

---

I. Je nommerai centre de symétrie d'un polyèdre, un point C, *tel, qu'en le joignant à un sommet quelconque* S *du polyèdre, et prolongeant* SC *d'une quantité égale à elle-même, le point s ainsi obtenu soit aussi un sommet du polyèdre.*

II. Je nommerai axe de symétrie d'un polyèdre, une droite AB, *telle, qu'en faisant tourner le polyèdre d'un angle (une partie aliquote de* 360°*) autour de* AB, *les nouveaux lieux des sommets coincident avec les anciens.*

III. Je nommerai plan de symétrie du polyèdre un plan, tel, qu'en abaissant d'un sommet quelconque S *une perpendiculaire sur ce plan, et la prolongeant d'une quantité égale à alle-même, l'extrémité* Σ *ainsi obtenue soit aussi un sommet du polyèdre.*

IV. Nous pouvons maintenant définir . . un polyèdre symétrique, celui qui possédera, soit un centre de symétrie, soit un ou plusieurs axes de symétrie, soit un ou plusieurs plans de symétrie.

Was Herrn *Bravais* zur Aufstellung dieser verschiedenartigen Kennzeichen der Symmetrie in Bezug auf einen Punkt, eine Gerade und eine Ebene Veranlassung gegeben hat, geht aus seiner Abhandlung nicht hervor. Wie indessen das Folgende lehren wird, entspringen diese Kennzeichen sämmtlich aus meiner Definition der Symmetrie, als gemeinschaftlicher Quelle, und alle nach Herrn *Bravais* symmetrisch zu nennenden Figuren sind es auch nach mir, sowie umgekehrt.

dem die Punkte A und B auf einerlei oder verschiedenen Seiten der Ebene CDE liegen, auch M und N auf einerlei oder verschiedenen Seiten der Ebene OPQ sich befinden; und was sonst noch aus dem Begriffe der Gleichheit und Aehnlichkeit gefolgert werden kann.

Die Ordnung übrigens, in welcher man die Buchstaben der einen der beiden Reihen, etwa der obern, auf einander folgen läst, ist offenbar ganz willkührlich, dafern man nur unter jeden Buchstaben derselben den ihm entsprechenden der andern Reihe setzt, und man kann daher z. B.

$$\text{statt } \frac{ABCDE}{=MNOPQ} \text{ auch schreiben } \frac{BEADC}{=NQMPO}.$$

Oder mit andern Worten, indem man je zwei über einander stehende Buchstaben der Gleichung schlechthin ein Paar nennt: die Aufeinanderfolge der Paare kann willkührlich geändert werden; nur müssen alle anfänglich in einer Reihe befindlichen Buchstaben auch nachher in einer Reihe bleiben.

Dieses vorausgeschickt, wird nach der im Obigen gegebenen Definition symmetrischer Figuren die bei einem System von Punkten stattfindende Symmetrie immer durch eine Gleichung ausgedrückt werden können, indem man nämlich die die Punkte des Systems bezeichnenden Buchstaben in beliebiger Aufeinanderfolge einer andern Aufeinanderfolge derselben Buchstaben gleich setzt; z. B.

$$\frac{ABC}{=CBA}, \text{ oder } \frac{ABC}{=CAB}.$$

Aus der ersteren dieser zwei Gleichungen würde bloss folgen: $AB = CB$; aus der letzteren dagegen: $AB = CA = BC$. Das Dreieck ABC würde daher im ersteren Falle ein gleichschenkliges und B dessen Spitze, im letzteren ein gleichseitiges sein; beiderlei Dreiecke aber würden der Definition gemäss symmetrische Figuren zu nennen sein.

Um nun von den hiernach möglichen verschiedenen Arten symmetrischer Figuren eine Uebersicht zu gewinnen, wollen wir zunächst die an sich willkührliche Aufeinanderfolge der verschiedenen Paare, aus denen eine Gleichung besteht, nach der Regel ordnen, dass auf jedes Paar, wo es möglich ist, zunächst dasjenige folgt, dessen oberer Buchstabe einerlei mit dem untern Buchstaben des vorhergehenden Paares ist. Ist man auf solche Weise, von einem beliebigen Paare der Gleichung ausgehend, zu dem Paare gelangt, dessen unterer Buchstabe einerlei mit dem

obern Buchstaben des Ausgangspaares ist, so kann man als nächstes Paar, wenn anders noch welche in der Gleichung vorhanden sind, abermals ein beliebiges unter den noch übrigen wählen. Von diesem, als neuem Anfangspaare, geht man nach der bemerkten Regel bis zu demjenigen fort, dessen unterer Buchstabe identisch mit dem obern des neuen Anfangspaares ist, und wiederholt dieses Verfahren, bis alle Paare der Gleichung erschöpft sind. Was noch den speciellen Fall anlangt, wenn bei einem oder etlichen Paaren der untere Buchstabe derselbe wie der obere sein sollte, so wird, da in keiner der beiden Reihen derselbe Buchstabe mehr als ein Mal vorkommen kann, durch ein solches Paar kein weiterer Fortgang bedingt, und das nächstfolgende Paar kann ein beliebiges unter den noch übrigen sein.

Nach einer solchen Umwandlung der Gleichung besteht sie nunmehr aus einer oder mehreren Gruppen von Paaren, bei deren jeder das erste Paar eben so von dem letzten, wie jedes der übrigen von dem nächstvorhergehenden abhängt. Ich will daher solche Gruppen Perioden nennen und sie nach der Zahl der Paare, aus denen sie zusammengesetzt sind, in eingliedrige, zweigliedrige, dreigliedrige u. s. w. unterscheiden.

So werden z. B. die zwei obigen Gleichungen für das gleichschenklige und das gleichseitige Dreieck, periodisch geordnet, folgende sein:

$$\begin{matrix} ACB \\ = CAB' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} ACB \\ = CBA. \end{matrix}$$

Die erste derselben besteht aus einer zwei- und einer eingliedrigen, die zweite aus einer dreigliedrigen Periode.

Auf dieselbe Art verwandelt sich die Gleichung

$$\begin{matrix} ABCDEFG \\ = FGBCEAD \end{matrix} \text{ in } \begin{matrix} AFCBGDE \\ = FABGDCE \end{matrix} \ldots (x)$$

und zerfällt somit in eine zwei-, eine vier- und eine eingliedrige Periode.

Durch diese periodische Anordnung einer Gleichung ist nun zugleich der Weg gebahnt, um die Gestalt des in ihr begriffenen Systems von Punkten näher zu bestimmen.

Nehmen wir für's Erste an, dass die Gleichung nur aus Einer Periode bestehe.

Ist die Periode eingliedrig, so drückt die Gleichung nichts Anderes, als das Gesetz der Identität aus, wie $A=A$. Ebenso wird die Gleichung mit einer zweigliedrigen Periode, wie $AB=BA$, immer erfüllt, welches auch die Oerter von A und B

sein mögen. Die Gleichung mit einer dreigliedrigen Periode giebt, wie wir bereits gesehen haben, ein gleichseitiges Dreieck zu erkennen. Bei vier- und mehrgliedrigen Perioden ist zu unterscheiden, ob die Construction auf eine Ebene beschränkt sein, oder im Raume überhaupt ausgeführt werden soll. Im ersteren Falle giebt die Construction einer Gleichung mit einer $n$gliedrigen Periode, wie

$$ABCD \ldots MN$$
$$= BCDE \ldots NA,$$

ein gewöhnliches reguläres nEck, indem, der Gleichung zufolge, $AB = BC$, $BC = CD$, etc. und $ABC = BCD$, $BCD = CDE$, etc. ist, und folglich sowohl die Seiten, als die Winkel des nEcks $AB \ldots . N$ einander gleich sind.

Dasselbe reguläre nEck thut der Gleichung auch im Falle einer räumlichen Construction Genüge. Auch wird in diesem Falle die Gleichung durch keine andere Figur befriedigt, sobald n ungerade ist. Ist aber n gerade, so lässt sich noch eine andere Construction anwenden. Man beschreibe nämlich in einer Ebene ein reguläres nEck $A'B'C' \ldots M'N'$ und errichte abwechselnd auf der einen und der andern Seite der Ebene gleichlange Perpendikel $A'A, B'B, C'C, \ldots N'N$, sodass $A, C, E, \ldots M$ auf die eine, und $B, D, F, \ldots N$ auf die andere Seite der Ebene zu liegen kommen. Die somit entstehende nicht ebene Figur $ABC \ldots N$ befriedigt ebenfalls die Gleichung und könnte gleichfalls ein reguläres Vieleck genannt werden, da sie mit dem gewöhnlichen regulären Vieleck die Haupteigenschaft gemein hat, dass je zwei Diagonalen derselben, welche gleich viel Seiten überspannen, wie AD und BE, gleichlang sind. Ein solches nicht ebenes reguläres Vieleck $AB \ldots MN$ hat übrigens die Eigenthümlichkeit, dass es mit der Figur $BC \ldots NA$ nicht zur Deckung gebracht werden kann, so dass A auf B, B auf C, etc. fiele.

Noch eine besondere Constructionsart der Gleichung ist in dem Falle ausführbar, wenn die gerade Zahl n das Doppelte einer ungeraden Zahl, also $= 6$, oder 10, oder 14, etc. ist. Um dieses hier nur für $n = 6$ zu zeigen, so construire man ein reguläres Dreieck $A_{,}B_{,}C_{,}$ und errichte wie vorhin abwechselnd nach oben und unten auf der horizontal zu denkenden Dreiecksebene die gleichlangen Perpendikel $A_{,}A$, $B_{,}B$, $C_{,}C$, $A_{,}D$, $B_{,}E$, $C_{,}F$. Die hieraus entspringende Figur $ABCDEF$ wird gleichfalls der Gleichung

$$\begin{array}{l} ABCDEF \\ = BCDEFA \end{array}$$

Genüge thun und aus demselben Grunde wie vorhin ein reguläres Sechseck in weiterem Sinne zu nennen sein.

Gehen wir jetzt zur Construction einer Gleichung fort, welche mehr als eine Periode enthält, und dieses unter der die Betrachtung vereinfachenden Annahme, dass keine zwei Punkte der Gleichung bei der Construction zusammenfallen. Werden nämlich zwei Reihen, welche dieselben Buchstaben, nur in verschiedener Ordnung enthalten, einander gleich gesetzt, so wird es sich meistens treffen, dass bei Construction dieser Gleichung zwei oder mehrere Punkte zusammenfallend angenommen werden müssen. Sollte z. B. die oben mit (x) bezeichnete Gleichung in einer Ebene construirt werden, so müsste man entweder A und F getrennt und C, B, G, D, E in der Mitte zwischen A und F vereinigt annehmen, oder man hätte ein Quadrat $CBGD$ zu verzeichnen, in dessen Mittelpunkte A, F, E zusammen fielen. Da aber eine Figur dadurch, dass man mit einem ihrer Punkte noch einen oder mehrere vereinigt sein lässt, nicht geändert wird, so werde ich zugleich mit bemerken, wie die Gleichung beschaffen sein muss, damit man nicht nöthig hat, zwei oder mehrere verschiedenartig in der Gleichung bezeichnete Punkte zusammenfallen zu lassen.

1) Soll die Gleichung in einer geraden Linie construirt werden können, so müssen alle Perioden der Gleichung zweigliedrig sein, bis auf eine, welche eingliedrig sein kann. Die Construction aber besteht darin, dass man in der Geraden von einem und demselben in ihr gelegenen Punkte die zwei Punkte jeder zweigliedrigen Periode gleichweit nach entgegengesetzten Seiten entfernt annimmt und jenen Punkt den Ort des Punktes der eingliedrigen Periode sein lässt, wenn anders eine solche vorhanden ist. — In der That kann ein System von Punkten in einer Geraden ausserdem, dass man jeden Punkt sich selbst entsprechend setzt, nur noch auf Eine Art sich selbst gleich und ähnlich sein; dergestalt nämlich, dass, wenn A, B, C, D, E die Punkte des Systems, und zwar in derselben Ordnung, in welcher sie in der Linie auf einander folgen, bezeichnen, sie resp. den Punkten E, D, C, B, A entsprechen. Dies giebt für die Symmetrie des Systems die Gleichung

$$\begin{array}{l} ABCDE \\ = EDCBA \end{array}, \text{ oder periodisch geordnet: } \begin{array}{l} AEBDC \\ = EADBC \end{array}$$

eine Gleichung, welche aus zwei zweigliedrigen und einer eingliedrigen Periode zusammengesetzt ist. Zugleich geben die speciellen hieraus folgenden Gleichungen

$$ACE = ECA \text{ und } BCD = DCB$$

zu erkennen, dass C der gemeinschaftliche Mittelpunkt von AE und BD ist.

2) Soll die Gleichung in einer Ebene construirt werden können, so kann eine Periode eingliedrig sein; alle übrigen aber müssen gleichvielgliedrig sein. Heisst n die gemeinschaftliche Gliederzahl dieser Perioden, so erzeugt jede derselben ein reguläres nEck, dessen Grösse willkührlich, und die gegenseitige Lage dieser nEcke ist bloss dadurch bedingt, dass sie einen gemeinsamen Mittelpunkt haben, der zugleich der Ort des Punktes der eingliedrigen Periode ist.

In dem besondern Falle, wenn $n = 2$, ist ausser der eben bemerkten Constructionsweise noch eine andere zulässig. Man kann nämlich den geraden Linien oder Zweiecken, welche die zwei Punkte der verschiedenen zweigliedrigen Perioden verbinden, entweder dem Vorigen analog eine solche Lage in der Ebene geben, dass ihre Mittelpunkte zusammenfallen, oder auch eine solche Lage, dass sie von einer und derselben Geraden rechtwinklig halbirt werden. Im letztern Falle können übrigens unbeschränkt viele eingliedrige Perioden in der Gleichung noch vorhanden sein; die Oerter ihrer Punkte sind willkührlich in der halbirenden Geraden anzunehmen.

3) Ist eine Gleichung im Raume zu construiren, so müssen, abgesehen von den ein- und den zweigliedrigen Perioden, alle übrigen gleichvielgliedrig,*) es sei $n$gliedrig, sein. Sind nächst den $n$gliedrigen noch eine oder mehrere zweigliedrige vorhanden, so kann nur noch eine eingliedrige stattfinden, und wenn es der letztern mehr als eine giebt, so kann keine zweigliedrige vorhanden sein. Versteht man nun unter der Axe eines regulären ebenen Vielecks eine durch seinen Mittelpunkt gelegte und auf seiner Ebene normale Gerade, und unter dem Mittelpunkte und der Axe eines regulären nicht ebenen Vielecks den Mittelpunkt

---

*) Doch können in dem Falle, wenn n eine ungerade Zahl, > 1, ist, $n$gliedrige und $2n$gliedrige Perioden zugleich in der Gleichung vorkommen. Die erstern sind dann als ebene reguläre nEcke und die letztern als nicht ebene reguläre $2n$Ecke von der gedachten besondern Art zu construiren; sämmtliche Vielecke aber müssen eine gemeinsame Axe und einen gemeinsamen Mittelpunkt haben.

und die Axe des zu seiner Construction zu Hülfe genommenen ebenen Vielecks, so hat man die $n$gliedrigen Perioden der Gleichung durch eben so viel reguläre nEcke mit gemeinschaftlicher Axe*) darzustellen; wobei noch zu bemerken, dass, wenn n gerade ist, und man eine, oder etliche, oder alle Perioden als nicht ebene nEcke construirt, nicht nur die Axe, sondern auch die Mittelpunkte sämmtlicher nEcke zusammenfallen müssen. — Eben so müssen die Mittelpunkte aller nEcke auch dann coincidiren, wenn die Gleichung eine oder mehrere zweigliedrige Perioden enthält; die Punkte der letztern sind in der gemeinsamen Axe anzunehmen, in welcher sie in Bezug auf den gemeinsamen Mittelpunkt eine symmetrische Figur für sich bilden; und dieser Mittelpunkt ist der Ort des Punktes der etwa noch anwesenden eingliedrigen Periode. — Sind nächst den $n$gliedrigen zwei oder mehrere Perioden eingliedrig, in welchem Falle, wie schon erinnert, keine Periode zweigliedrig sein darf, so sind nur ebene reguläre nEcke zulässig, in deren gemeinsamer Axe die Punkte der eingliedrigen Perioden beliebig bestimmt werden können.

Eines der einfachsten hierhergehörigen Beispiele giebt die räumliche Construction der obigen Gleichung (x) ab. Hier ist $CBGD$ ein reguläres ebenes oder auch nicht ebenes Viereck und E sein Mittelpunkt; A und F aber sind zwei Punkte, welche in seiner Axe auf verschiedenen Seiten und gleichweit von E entfernt liegen.

Wenn endlich, abgesehen von den eingliedrigen, alle übrigen Perioden der Gleichung nur zweigliedrig sind, so kann die räumliche Construction auf dreifache Weise ausgeführt werden. Es müssen nämlich die Linien, welche die Paare von Punkten, aus denen die zweigliedrigen Perioden gebildet werden, einzeln verbinden, entweder einen gemeinsamen Mittelpunkt**) haben, oder sie alle müssen von einer und derselben Geraden,***) oder sie alle von einer und derselben Ebene†) rechtwinklig halbirt werden. Die erste dieser Constructionsweisen ist jedoch nur dann anwendbar, wenn in der Gleichung entweder keine oder bloss Eine eingliedrigen

*) *Axe de symétrie*, nach Herrn *Bravais*, nur dass dort die regulären nEcke, welche der Axe angehören, bloss ebene sind.

**) *Centre de symétrie*, nach Herrn *Bravais*.

***) *Axe de symétrie binaire*, nach Herrn *Bravais*.

†) *Plan de symétrie*, nach Herrn *Bravais*.

rige Periode vorhanden ist; der Ort des Punktes dieser Periode ist der gedachte Mittelpunkt. Bei der zweiten und dritten Weise kann die Anzahl der eingliedrigen Perioden jede beliebige sein, und die Punkte dieser Perioden können willkührlich in der halbirenden Geraden und resp. Ebene genommen werden. Uebrigens ist die Symmetrie, welche eine nach der dritten Weise construirte Figur besitzt, Symmetrie in dem bisher fast allein gebräuchlichen Sinne des Worts.

Die bisher betrachteten symmetrischen Figuren ergaben sich dadurch, dass wir einer zwischen mehreren Punkten aufgestellten Gleichung Genüge zu leisten suchten. Indessen sind dies nur die einfachsten symmetrischen Figuren. Denn man kann fordern, dass eine Figur zwei oder mehreren, zwischen ihren Punkten bestehenden, von einander unabhängigen Gleichungen zugleich Genüge thut; dass z. B. durch die gegenseitige Lage von vier Punkten A, B, C, D jede der beiden Gleichungen

$$ABCD = BADC \text{ und } ADBC = DACB,$$

oder jede der beiden Gleichungen

$$ACBD = ACDB \text{ und } ACBD = CABD$$

zugleich erfüllt wird. Wie man leicht wahrnimmt, sind die damit geforderten Figuren, wenn sie als ebene construirt werden, resp. ein Rechteck und ein Rhombus. Solche durch zwei oder mehrere Gleichungen bestimmte Figuren besitzen im Allgemeinen*) einen höheren Grad von Symmetrie und erfordern zu

---

*) Denn dass es Ausnahmen giebt, beweisen schon die angeführten Beispiele vom Oblongum und Rhombus, als welche weniger symmetrisch, als das schon durch die eine Gleichung

$$ABCD = BCDA$$

bestimmte Quadrat, sind. — Am sichersten dürfte der Grad der Symmetrie einer Figur durch die Zahl bestimmt werden, welche angiebt, auf wie viel verschiedene Arten die Figur sich gleich und ähnlich ist. Diese Zahl ist 8 beim Quadrat, 4 beim Oblongum und Rhombus, 2 bei dem Viereck, welches der Gleichung

$$ACBD = CADB$$

entspricht und entweder ein Rhomboid, oder ein solches Viereck ist, in welchem zwei Seiten einander parallel, aber nicht gleich, und die beiden andern Seiten einander gleich, aber nicht parallel sind; sowie 2 auch bei dem durch die Gleichung

$$ACBD = ACDB$$

definirten Viereck, d. i. bei demjenigen, in welchem zwei an einander stossende Seiten (AB und AD) für sich, und eben so die beiden andern Seiten (CB und CD) für sich einander gleich sind.

ihrer Discussion neue Betrachtungsweisen. Das Umfängliche dieses Gegenstandes verhindert mich, gegenwärtig näher darauf einzugehen; indessen gedenke ich später in einer grösseren Abhandlung die Lehre von symmetrischen Figuren nach der von mir gegebenen Definition möglichst vollständig darzustellen. Hier bemerke ich nur noch, dass die symmetrischen Figuren von der letztgedachten zusammengesetzteren Art es sind, deren Untersuchung Herr *Bravais* seine im Eingange dieses Berichtes erwähnte Denkschrift vorzugsweise gewidmet und ihre verschiedenen Formen zu classificiren gesucht hat.

OEFFENTLICHE SITZUNG AM 18. MAI

ZUR FEIER DES GEBURTSTAGS SR. MAJ. DES KOENIGS.

Herr **Ferdinand Reich** *legte eine Abhandlung vor, enthaltend: Neue Versuche mit der Drehwage zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde.*

Er beschäftigt sich zuerst mit der Differenz des von Baily und früher von ihm gefundenen Resultates, beschreibt dann die jetzige Einrichtung seines Instrumentes und theilt die Resultate der neuen damit angestellten Versuche mit, nach denen sich die mittlere Erddichte zu 5,58 ergiebt. Hieran schliesst sich noch die Erwähnung einiger Versuche über den etwaigen Einfluss des Magnetismus auf diese Beobachtungen und einiger Bemerkungen über die allgemeinere Anwendbarkeit der Drehwage zu Beobachtung und Messung sehr kleiner anziehender oder abstossender Kräfte.

Herr **Eduard Weber** *kündigt eine von ihm der Gesellschaft zu übergebende Abhandlung über den Mechanismus des menschlichen Gehörorgans an und hebt aus derselben einige bis jetzt streitige Lehren heraus.*

Er zeigt, dass die Schallwellen der Luft nicht auf die Weise durch das äussere Ohr, das Trommelfell und die Gehörknöchelchen zu den im Wasser des Labyrinths an Membranen ausgespannten Gehörnerven kommen, dass die Verdichtungs- und Verdünnungswellen unmittelbar dahin fortgeleitet werden, sondern dass für diesen Zweck folgender Mechanismus existirt, dessen Einrichtung und Wirkungsart bis jetzt noch nicht erkannt worden war. Mit dem Trommelfelle steht ein aus dem Hammer und Ambos gebildeter Winkelhebel in Verbindung, dessen Drehungsachse durch die Befestigungspunkte des *processus Folianus* und *processus brevis incudis* geht. Beide Gehörknöchelchen sind zwar durch ein Gelenk verbunden, welches aber so gebildet ist, dass es denselben in der auf die Achse senkrechten Drehungsebene keine Bewegung gegen einander gestattet, so dass sie sich also nur gemeinschaftlich in derselben bewegen können, wie es der Fall sein würde, wenn sie gar kein Gelenk hätten und nur ein einziges Knochenstück wären. Durch eine besondere Einrichtung der Befestigung des *processus Folianus* federt dieser Winkelhebel einwärts, wodurch das Trommelfell theils die nöthige Spannung erhält, theils verhindert wird, sich unabhängig von dem Winkelhebel zu bewegen. Die transversalen Schwingungen des Trommelfells, in welche dasselbe durch die schwingenden Theilchen der Luft versetzt wird, theilen sich daher dem Winkelhebel und mittelst desselben dem am andern Schenkel des Winkelhebels *(processus longus incudis)* befestigten Steigbügel mit, der mit seiner Basis in der das ovale Fenster verschliessenden Membran befestigt ist und sich daher den transversalen Schwingungen des Trommelfells entsprechend in ihr heraus und herein bewegt. Eine solche Bewegung des Steigbügels würde aber unmöglich sein, wenn das das knöcherne Labyrinth erfüllende incompressible Wasser nicht ausweichen könnte. Zu diesem Zwecke befindet sich daher eine 2te Oeffnung am Labyrinth, das runde Fenster, welches durch eine feine Membran verschlossen ist, die entsprechend der Bewegung des Steigbügels durch den Druck des Wassers heraus und herein bewegt wird.

Die Bewegung der erwähnten Membran kann man, wenn man den Steigbügel mit der Hand in dem ovalen Fenster bewegt, sogar mit unbewaffneten Augen wahrnehmen. An der Stempelbewegung des Steigbügels, welche vom ovalen zum runden Fenster fortgepflanzt wird, nimmt nothwendig das ganze Labyrinthwasser Antheil. Die durch dieselbe dem Labyrinthwasser mitgetheilten Schwingungen bewegen demnach auch die in demselben schwebenden nervenreichen Theile des häutigen Labyrinths und ausserdem vermöge besonderer Einrichtung den häutigen Theil der *Lamina spiralis* und die in ihm ausgebreiteten Nerven. Die *Lamina spiralis* der Schnecke ist nämlich zwischen dem ovalen und runden Fenster im Labyrinthwasser ausgespannt, und die von jenem zu diesem fortschreitenden Schwingungen müssen daher, um zum runden Fenster zu gelangen, aus dem *vestibulum* in die *scala vestibuli* der Schnecke, und von hier durch die Membran der *lamina spiralis* hindurch in die *scala tympani* gehen und kreuzen demnach den in dieser Membran endigenden Schneckennerven.

Derselbe wies ferner aus Versuchen nach, dass der Trommelfell-Apparat auch beim Hören durch die Kopfknochen mitwirkt, wenn die Schallschwingungen nicht durch den äusseren Gehörgang eingehen, sondern den Kopfknochen, z. B. von einem festen Körper oder vom Wasser, die sie berühren, mitgetheilt werden, dass man aber durch Erfüllung der Gehörgänge mit Wasser denselben völlig ausser Wirksamkeit setzen kann. Taucht man daher so im Wasser unter, dass die Luft in den Gehörgängen zurückbleibt, so wirkt das Trommelfell auch beim Hören unter dem Wasser mit; taucht man aber unter, nachdem die Gehörgänge sorgfältig mit Wasser gefüllt worden sind, so hört man daselbst ohne die Mitwirkung des Trommelfell-Apparats. Beiderlei Hören zeigt wesentliche Verschiedenheiten. Ist das Trommelfell von Luft umgeben und daher, während wir uns unter dem Wasser befinden, noch wirksam, so empfinden wir den Schall als einen von aussen kommenden Eindruck und unterscheiden deutlich, ob er von rechts oder von links kommt. Ist das Trommelfell aber durch Erfüllung der Gehörgänge mit Wasser ausser Wirksamkeit gesetzt, so nehmen wir denselben Schall nur als eine Empfindung im Innern des Kopfes wahr und können nicht unterscheiden, ob er von rechts oder links kommt. Der Grund, warum wir die Gehöreindrücke, als von aussen kommend, wahrnehmen und unterscheiden können, ob sie von rechts

oder links kommen, liegt demnach nicht in der Empfindung der Gehörnerven, sondern in der des äusserst nervenreichen Trommelfells. Wenn wir im Wasser untertauchen und unsere Gehörgänge mit Luft erfüllt sind, können wir nur rechts und links unterscheiden: in der Luft dagegen unterscheiden wir auch, ob der Schall von vorn oder hinten, von oben oder von unten kommt. Diese letztere Fähigkeit verdanken wir dem äusseren Ohre, welches im Wasser unwirksam ist, denn schon dadurch, dass man die Ohren platt drückt und mit den Händen vor den Gehörgängen einen die Stelle des Ohrs vertretenden Schirm bildet, wird bewirkt, dass der Schall von der entgegengesetzten Seite her zu kommen scheint, als wo er wirklich her kommt, so dass bei verschlossenen Augen ein von vorn kommender Schall von hinten, ein von unten kommender Schall von oben zu kommen scheint und umgekehrt. Von dieser Umkehrung der Wirkung des äusseren Ohres, so wie von der Existenz des anfänglich erwähnten Hebel- und Stempelapparates zum Zwecke der Fortpflanzung der Schwingungen des Trommelfells zum Labyrinthwasser haben sich mehrere Mitglieder der Gesellschaft durch eigne Versuche und Anschauung überzeugt.

---

d'Arrest, *Ueber die Gruppirung der periodischen Cometen.*

Nachdem ich vor Kurzem in meiner Abhandlung über das System der dreizehn kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter die gegenseitigen Verhältnisse der Bahnen, die Anordnung ihrer Ebenen im Raume und deren Beziehung zur Umdrehungsebene der Sonne zuerst untersucht hatte, lag es nahe, ähnliche Betrachtungen auch auf diejenigen Cometen anzuwenden, welche Ellipsen von genau bekannten Dimensionen beschreiben. Es würde zwar von grossem Interesse sein, die Untersuchung auf sämmtliche in diesem Augenblicke bekannte Bahnen auszudehnen und wenigstens die räumliche Vertheilung der Bahnebenen so wie die Anordnung der Apsidenlinien auf der Kugelfläche auch für die bei Weitem grössere Zahl derjenigen Cometen in Betrachtung zu nehmen, von denen wir nur die Elemente der parabolischen Bewegung kennen, aber die Resultate dieser ausgedehnteren Arbeit, mit der ich einen Anfang bereits ge-

macht habe, werde ich erst später der königlichen Gesellschaft vorzutragen im Stande sein. Während nämlich *Lambert* in den Kosmologischen Briefen über die Einrichtung des Weltbaues seine Schlüsse auf die einundzwanzig Cometen der *Halley*'-schen Tafel gründete, welche die von 1337 bis zu Ende des siebzehnten Jahrhunderts berechneten Cometen enthält, und *Bode*, gegen Ende des vorigen Jahrhunderts, seinen ganz ähnlichen und nach *Lambert* gebildeten Untersuchungen zweiundsiebenzig damals berechnete Cometenbahnen unterlegte, sind gegenwärtig schon fast zweihundert Bahnen zu combiniren und deren Bestimmungsstücke von sehr verschiedenen Gesichtspunkten aus zu betrachten.

Die abgesonderte Untersuchung gewisser Cometenbahnen aus der grossen Zahl der überhaupt bekannten hat indessen neuerdings ein Interesse gewonnen, seitdem Herr *Hind* in London, im Juni vorigen Jahres, zuerst die Bemerkung gemacht hat, dass die Cometen, deren verhältnissmässig kleine mittlere Abstände von der Sonne mit Sicherheit bekannt sind, entschieden in zwei gesonderte Gruppen zerfallen, dergestalt, dass jede dieser Gruppen als ein besonderes System zur Untersuchung der oben angedeuteten Verhältnisse auffordert.

Nach Herrn *Hind's* erster Andeutung hat zunächst Herr Prof. *Stephan Alexander* zu New-Jersey in einer Abhandlung „*On the classification and special points of resemblance of certain of the periodic Comets*" diese Gruppen auf charakteristische Eigenschaften untersucht und daran Erörterungen geknüpft über die Wahrscheinlichkeit eines gemeinschaftlichen Ursprungs gewisser Glieder dieser Systeme.

Ich will hier zunächst auf eine nähere Prüfung einiger von den Bemerkungen des Herrn Prof. *Alexander* eingehn, dann die gegenseitigen Beziehungen der Glieder der ersten *Hind*'schen Gruppe anführen und auf eine bemerkenswerthe Eigenschaft aufmerksam machen, bezüglich auf die Lage gegenseitiger Durchschnitte und die Umdrehungsebene der Sonne.

Behält man aus der Zahl der Cometen von kürzester Umlaufszeit nur diejenigen gegenwärtig bei, über deren grosse Axen theils durch wirklich beobachtete Wiedererscheinungen, theils durch die übereinstimmenden Ergebnisse genauer, auf umfassende Beobachtungsreihen gegründeter Untersuchungen wir nicht zweifelhaft sein können, so besteht die erste Gruppe, geordnet nach den mittleren Abständen, aus den Cometen von *Encke, De Vico,*

Brorsen, *Biela* und *Faye*. Die halben grossen Axen dieser fünf Bahnen sind nahezu von der Ordnung des Systems der kleinen Planeten; der grösste Unterschied beträgt etwa das Anderthalbfache des Radius der Erdbahn. Die Rückkehr zum Perihel ist bei dreien dieser Körper constatirt, bei den beiden andern steht sie nahe bevor. Wir haben bestimmte Andeutungen von mehreren andern Gliedern dieses Systems, deren mittlere Abstände innerhalb der hier angegebenen Grenze fallen, ohne jedoch sicher genug bekannt zu sein, um sie der Gruppe gegenwärtig beizählen zu dürfen.

Die zweite Gruppe besteht aus den Cometen von *Halley*, Comet von 1812, Comet von *Olbers* (vom Jahre 1815), Comet von *De Vico* (vom Jahre 1846), Comet von *Brorsen* (vom Jahre 1847), sämmtliche in den mittleren Sonnenabständen dahin übereinstimmend — zwischen 17 und 18 — dass die Schwankung kaum einen Halbmesser der Erdbahn umfasst. Coincidirt die erste Gruppe mit dem Systeme der kleinen Planeten, so entspricht die zweite der Uranusbahn; während in jener sämmtliche Glieder sich rechtläufig mit planetarischen Neigungen bewegen, zeigt in der Uranusgruppe nur der *Halley*'sche Comet eine rückläufige Bewegung.

Geht man die heutigen Verzeichnisse der berechneten Cometenbahnen durch, so findet sich noch manche Andeutung einer Ellipticität; indessen führen diese sämmtlich zu so grossen Umlaufszeiten, dass bei der Unsicherheit, die nothwendig in diesem Stücke zurückbleiben musste, an eine Classification entfernterer Gruppen gegenwärtig nicht gedacht werden kann. Zwei Cometen machen hiervon scheinbar eine Ausnahme, der zweite Comet von 1793, dem *Burckhardt* eine Umlaufszeit von zehn bis zwölf Jahren zuschreibt, und der im Juni 1846 von Dr. *Peters* in Neapel entdeckte Comet, dessen Periode man auf dreizehn oder sechzehn Jahre berechnet hat. Die mittleren Abstände würden hiernach nahezu der halben grossen Axe der Jupiterbahn entsprechen. In der That betrachtet Herr Prof. *Alexander* in der angeführten Abhandlung diese beiden Cometen als die ersten Glieder eines intermediären Systems, so dass nach seiner Classification die sämmtlichen periodischen Cometen gegenwärtig in drei gesonderte Gruppen zerfallen, entsprechend den Halbaxen der kleinen Planeten, des Jupiter und des Uranus.

Zur Charakterisirung der Räume unsers Planetensystems, zu welcher die Cometen durch ihre grosse Anzahl wesentlich

beitragen, wird es nicht unwichtig sein nachzuweisen, dass wir keinen Grund haben, die Existenz dieser zwischenliegenden Gruppe anzunehmen. Mit der Berechnung des letzteren der beiden in Rede stehenden Cometen habe ich mich bereits vor längerer Zeit beschäftigt, während die Untersuchung über die wahre Bewegung des Cometen von 1793 erst neuerdings zu Ende geführt worden ist. Für jenen Fall will ich die Resultate hier kurz wiederholen, und auch für diesen die neuesten Ergebnisse einfach anführen, da das Detail der Bahnbestimmung in No. 758 der Astronomischen Nachrichten mitgetheilt ist.

Ich beginne mit dem Cometen von 1793. Der Präsident *Saron*, der, wie *Lalande* sagt, damals der einzige Pariser Astronom war, welcher Rechnungen dieser Art überhaupt unternehmen konnte, hatte sich noch im Gefängnisse bis zu dem Tage vor seinem gewaltsamen Tode vergeblich bemüht, die von *Messier* angestellten Beobachtungen dieses Cometen in einer parabolischen Bahn darzustellen. Lange Zeit nachher, im Jahre 1818, nahm *Burckhardt* die Untersuchung wieder auf und leitete aus verschiedenen Combinationen je dreier Beobachtungen elliptische Bahnen her, nach denen der Comet in 10 oder 12 Jahren seinen Umlauf um die Sonne vollendet. *Burckhardt* deutete zugleich hin auf eine mögliche Identität dieses Cometen mit einem zehn Jahre früher beobachteten (im Jahre 1783), welcher gleichfalls Spuren einer Abweichung von der Parabel verrathen haben sollte. Diese Vermuthung ist bis auf die Gegenwart oft wiederholt worden. Schon im Jahre 1846 habe ich die *Messier*'schen Originalbeobachtungen, deren Bekanntmachung aus den Manuscripten wir *Burckhardt* verdanken *), einer neuen und scharfen Reduction unterworfen und in dieser Gestalt mit den andern Hülfsmitteln zur Untersuchung der wahren Bahn damals in den Astronomischen Nachrichten veröffentlicht. **) Diese Untersuchung nun hat gegenwärtig ergeben, dass man die ganze Reihe der innerhalb dreier Monate beobachteten Oerter in einer parabolischen Bahn, welche sehr geringe Abweichungen von der ursprünglichen *Saron*'schen Bestimmung zeigt, befriedigend darstellen kann. Will man sich indessen den mehr Zutrauen verdienenden Geradenaufsteigungen vorzüglich anschliessen, da die Declina-

*) *Connaissance des temps pour l'an* 1821.

**) *Astr. Nachr. No.* 615.

tionen nachweislich durch Anwendung eines Mikrometers von geringerer Güte gelitten haben, so ergiebt sich eine Umlaufszeit von mehr als vier Jahrhunderten. Wenn man auch das directe Ergebniss dieser Rechnung — der gefundenen halben grossen Axe entspricht eine Umlaufszeit von 422 Jahren — nicht wird ansehn können als festgesetzt bis auf enge Grenzen der Unsicherheit, so wird man dennoch in Zukunft den zweiten Cometen von 1793 nicht denen von kurzer Umlaufszeit beizählen dürfen.

Nicht zuverlässiger sind die Resultate, welche aus den wenigen Beobachtungen des *Peters*'schen Cometen vom Jahre 1846 hergeleitet werden konnten. Dieser kleine teleskopische Comet wurde allein vom Entdecker mit den Instrumenten der neapolitaner Sternwarte verfolgt, da in Deutschland alle Versuche, ihn aufzufinden, durch die sommerliche Dämmerung und den tiefen Stand in den Dünsten des Horizonts vereitelt wurden. Diese Beobachtungen sind mehr als gewöhnlich ungenau, und wenn auch der Entdecker in einer späteren Abhandlung in den Neuen Schriften der Akademie zu Neapel*) meine Vermuthung der Periodicität dieses Cometen sehr nahe bestätigt gefunden hat, indem er die Umlaufszeit von sechzehn auf dreizehn Jahre verringerte, so kann es doch kaum zweifelhaft sein, dass man die übrigbleibenden Fehler der wenig zahlreichen Beobachtungen durch Annahme einer beträchtlich kleineren Axe nicht erheblich vermehren würde.

Das hier Angeführte möchte genügen nachzuweisen, dass gegenwärtig keine Veranlassung vorzuliegen scheint, von der merkwürdigen Gruppirung der periodischen Cometen in zwei Systeme, das der kleinen Planeten und das des Uranus, abzugehn, und dass der mittlere Abstand keines einzigen von den Cometen, deren verhältnissmässig kurze Umlaufszeit sicher nachgewiesen ist, die engen Grenzen überschreitet, welche oben festgesetzt worden sind.

Beschränkt man also die innere Gruppe auf die oben angeführten fünf Cometen, so bilden diese zehn Bahnpaare, welchen zwanzig gegenseitige Durchschnitte in den auf- und niedersteigenden Knoten je zweier zugehören. Man kann die gegenwärtig hier stattfindenden Verhältnisse genau in derselben Weise aufsuchen, nach welcher es für das System der kleinen Planeten

*) *M moria sopra la Nuova Cometa di tredici anni.*

geschehen ist. Andere Gesichtspunkte dagegen werden sich hier nicht verfolgen lassen, bevor die Anzahl der in ihren Bahndimensionen sicher bekannten Glieder dieser innern Gruppe beträchtlich vermehrt sein wird. Die Ergebnisse dieser Combination sind in der folgenden Tafel zusammengestellt, in der Weise, dass, wiederum von den kleinsten Neigungen successive aufsteigend, jede Bahn mit den übrigen paarweise verbunden wird, und zwar geschieht diese Combination nach der Reihenfolge der gegenseitigen Neigungen selbst. Die Tafel giebt unmittelbar für die so entstehenden vier Gruppen von Verbindungen die relative Inclination der Bahnebenen, die Richtung des gegenseitigen Durchschnitts und die zugehörigen vier Radienvectoren, womit der Ort im Raum in den einzelnen Fällen vollständig bestimmt ist.

Tafel der gegenwärtig stattfindenden Durchschnitte in der innern Gruppe.

	J.	☊ Vicobahn.	Vico.	Comet.	Vico.	Comet.
		Erste Gruppe. Comet von *De Vico*.				
Encke	13° 25′	322° 0′	1,216	3,375	4,553	0,345
Faye	13 52	216 12	3,026	5,745	1,405	1,717
Biela	15 30	245 30	2,076	3,326	1,784	0,972
Brorsen	28 43	105 59	2,910	0,655	1,431	5,336
		Zweite Gruppe. Comet von *Faye*.				
Biela	7° 31′	308° 28′	2,963	5,188	2,386	0,880
Encke	21 42	359 13	1,954	4,087	1,667	0,386
Brorsen	35 45	86 33	1,831	0,699	4,753	3,514
		Dritte Gruppe. Comet von *Biela*.				
Encke	17° 52′	18° 7′	1,523	1,699	1,485	0,384
Brorsen	41 38	93 30	0,870	0,679	5,540	4,140
		Vierte Gruppe. Comet von *Encke*.				
Brorsen	40° 17′	115° 46′	0,384	0,650	1,693	5,625

Es liegt in der Natur der hier betrachteten sehr excentrischen Bahnen, dass die Fälle grosser gegenseitiger Annäherungen in den Durchgängen durch die gemeinschaftliche Knotenlinie viel seltener eintreten werden, als es sich bei Untersuchung des Systems der kleinen Planeten gezeigt hat. So finden sich in der That höchstens drei oder vier Punkte, welche man als Fälle ungewöhnlicher Nähe zweier Himmelskörper bezeichnen könnte.

Zunächst ist es der schon längst nachgewiesene kleine Abstand von der Bahn des *Biela*'schen Cometen, in welchem der *Encke*'sche Comet über dieser Bahn aufsteigt. Nur unerheblich grösser ist der Abstand, in welchem der *Brorsen*'sche Comet über derselben Bahn des *Biela*'schen Cometen aufsteigt. Ueberhaupt zeigen sich, der Reihe nach, die vier folgenden gegenseitigen Abstände als die kleinsten in der ganzen Gruppe:

Encke–Biela im aufsteigenden Knoten 0,176
Brorsen–Biela im aufsteigenden Knoten . . . 0,191
Brorsen–Encke im aufsteigenden Knoten . . . 0,266
Faye–De Vico im niedersteigenden Knoten . . 0,312

Ich werde hier nicht auf die Betrachtung eingehn, welche man gleichfalls angeregt hat, um aus den gegenwärtig stattfindenden Verhältnissen einen gemeinschaftlichen Ursprung der Körper dieser Gruppe wahrscheinlich zu machen. Die Bewegung der Apsiden und der Knotenlinien besonders ist, zum Theil nachweisbar, wegen der unmittelbaren Nähe zum Jupiter, in welche diese Cometen nach gewissen Perioden zurückgeführt werden, so gross, dass jeder Schluss auf ältere oder ursprüngliche Zustände hier durchaus unanwendbar erscheint. Dagegen ist es erlaubt, die gegenwärtig bestehende Verbindung der Bahnen unter einander, wiederum analog der Sonderung bei den kleinen Planeten, in Kettenringe und isolirt liegende zu trennen. Ganz ausgeschlossen von den übrigen erscheint keine von den fünf Cometenbahnen; andererseits greift keine in die vier übrigen zugleich kettenringartig ein. Die Anordnung ist nämlich ausführlich die folgende, nach der Anzahl der aufgereihten Ringe fortgehend.

De-Vicobahn. Eingreifend: *Biela, Encke, Brorsen.*
Isolirt: *Faye.*

Bielabahn. Eingreifend: *De Vico, Faye, Encke.*
Isolirt: *Brorsen.*

Enckebahn. Eingreifend: *De Vico, Faye, Biela.*
Isolirt: *Brorsen.*

Fayebahn. Eingreifend: *Biela, Encke.*
Isolirt: *De Vico, Brorsen.*

Brorsenbahn. Eingreifend: *De Vico.*
Isolirt: *Faye, Biela, Encke.*

So erscheint denn auch unter diesen fünf Bahnen der innern

Gruppe die Eigenschaft des Systems der kleinen Planeten wieder, vermöge welcher die Bahnen dergestalt unter einander verknüpft sind, dass man keine von ihnen, unter der körperlichen Gestalt wie Reifen gedacht, isolirt herausheben könnte, ohne die ganze Gruppe zu entfernen.

Wenn man endlich die Lage der Durchschnitte jeder Bahn mit den übrigen Ebenen betrachtet, so ist nicht nur, welche Bemerkung auch schon Prof. *Alexander* gemacht, das nahe Zusammenfallen der Durchschnitte sämmtlicher Ebenen mit der Ebene der *Brorsen*'schen Bahn vorzüglich auffällig, sondern innerhalb des wenig beträchtlichen Bogens, in welchem der Comet von *Brorsen* über die andern vier Bahnen sich erhebt, steigt er auch über den Sonnenäquator auf und erreicht zugleich seine grösste Sonnennähe. Man übersieht alle diese Umstände zugleich, wenn man die wahren Anomalien hinschreibt, unter welchen der Comet die nebengeschriebenen Ebenen durchschneidet:

Enckebahn	+	2° 13′	wahre Anomalie.
Sonnenäquator . . .	—	5 50	
De-Vicobahn	—	9 59	
Bielabahn	—	25 7	
Fayebahn	—	32 37.	

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass, wollte man noch einige andere weniger sicher bestimmte Cometen derselben Gruppe hinzunehmen, die neuentstehenden Durchschnitte innerhalb der hier angeführten Grenzen fallen würden.

Man muss sich begnügen, diese Verhältnisse einfach hervorzuheben, ohne bei der sehr mangelhaften Kenntniss von der innern sowohl als von der äussern Gruppe der periodischen Cometen in der Gegenwart weitere Folgerungen anknüpfen zu wollen. —

SITZUNG AM 14. JUNI.

P. A. Hansen, *Ueber ein neues Coordinatensystem.*

In diesem Aufsatze beehre ich mich der Königl. G. d. W. eine Mittheilung über ein neues Coordinatensystem, worauf ich gekommen bin, zu machen. Dieses in der Störungstheorie wesentlichen Nutzen gewährende Coordinatensystem liegt in der That zwar meinen in den ,,*Fundamenta investigationis etc.*" entwickelten Formeln zu Grunde, ist aber dort nicht mit bestimmten Worten ausgesprochen. Der Nutzen desselben erstreckt sich nicht bloss auf die Revolutions-, sondern auch auf die Rotationsbewegung der Planeten und Satelliten; es kann gleichfalls mit den durch die Natur der Sache bedingten Abänderungen dienen, um die Theorie der Curven von doppelter Krümmung einfacher darzustellen, wie bisher. Ich fange mit folgender Erklärung an:

,,Ideale Coordinaten nenne ich alle Coordinaten eines Planeten oder Satelliten, die die Eigenschaft haben, dass sie nebst ihren ersten Differentialen in Bezug auf die Zeit in der gestörten Bahn dieselbe Form haben, wie in der ungestörten."

Das Epithet ,,ideal" hat mein hochverehrter, leider viel zu früh verstorbener Freund *Jacobi* angegeben, welcher aber Coordinaten damit bezeichnen wollte, die eine andere Form hatten wie die, die ich hier erklären werde. *Jacobi* stimmte mit mir darüber ein, dass dieses Epithet die Sache nicht genau bezeichnet; allein da es nothwendig schien, diese Coordinaten mit einem besondern Beiwort zu bezeichnen, und das gewählte so beschaffen ist, dass es eine Verwechselung dieser Coordinaten mit andern in der Mathematik eingeführten Grössen nicht zulässt, so habe ich es beibehalten.

Nennen wir nun x, y, z die auf feste, rechtwinklige Axen bezogenen Coordinaten irgend eines Planeten oder Satelliten, so sind diese sowohl, wie jede endliche Function derselben, ohne Weiteres ideale Coordinaten. Seien X, Y, Z irgend ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem, so ist jedenfalls

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \\ Y &= \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ Z &= \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wenn α, β, γ, α', etc. die bekannten neun Cosinusse bedeuten. Insofern nun diese Cosinusse Grössen sind, die die Zeit weder explicite noch implicite enthalten, sind X, Y, Z auch ohne Weiteres ideale Coordinaten. Wenn aber X, Y, Z auf Axen bezogen werden, die mit der Zeit im Raume ihren Ort ändern, und folglich α, β, etc. Functionen der Zeit sind, so sind X, Y, Z nur alsdann ideale Coordinaten, wenn

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = x d\alpha + y d\alpha' + z d\alpha'' \\ 0 = x d\beta + y d\beta' + z d\beta'' \\ 0 = x d\gamma + y d\gamma' + z d\gamma'' \end{cases}$$

wo die Differentiale auf die Zeit bezogen werden müssen.

Da im Falle der Unveränderlichkeit von α, β, etc. diese Gleichungen von selbst erfüllt sind, so kann man überhaupt alle möglichen idealen Coordinatensysteme durch die Gleichungen (2) definiren.

Da jedes Coordinatensystem von drei Bedingungen oder Gleichungen abhängt, und die Anzahl der Gleichungen (2) auch drei ist, so scheint es, dass nur ein einziges auf bewegliche Axen bezogenes ideales Coordinatensystem möglich sei; ich werde aber zeigen, dass die Gleichungen (2) nur zwei wesentlich von einander verschiedene Gleichungen bilden, und dass folglich eine unendlich grosse Anzahl von idealen Coordinatensystemen möglich ist.

Aus den Gleichungen (1) folgt umgekehrt

$$(3) \quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ y = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \\ z = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \end{cases}$$

substituirt man diese in (2), nimmt auf die bekannten Bedingungsgleichungen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \quad \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Rücksicht, und setzt zur Abkürzung

$$\begin{aligned} A &= \beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'' = -\alpha d\beta - \alpha' d\beta' - \alpha'' d\beta'' \\ B &= \alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'' = -\gamma d\alpha - \gamma' d\alpha' - \gamma'' d\alpha'' \\ C &= \gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'' = -\beta d\gamma - \beta' d\gamma' - \beta'' d\gamma'' \end{aligned}$$

so gehen die (2) über in

$$(4) \ldots \; 0 = AY - BZ; \quad 0 = AX - CZ; \quad 0 = BX - CY$$

eliminirt man aber aus irgend zwei dieser Gleichungen die darin gemeinschaftlich vorkommende Coordinate, so erhält man die

dritte Gleichung. Es ist also jede dieser drei Gleichungen in den beiden andern enthalten, und die Gleichungen (2) bilden daher nur zwei von einander wesentlich verschiedene Gleichungen. Die Gleichungen (4) sind die Gleichungen der instantanen Drehungsaxe des Coordinatensystems X, Y, Z, und es ist daher leicht, die Lage dieser Axe im Raume anzugeben. Die Cosinusse der Winkel, die diese Drehungsaxe mit den Axen der X, Y, Z macht, sind resp.

$$\xi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \eta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \zeta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

und die Cosinusse der Winkel, die der Radius Vector mit denselben Axen macht, sind resp.

$$\xi' = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \quad \eta' = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \quad \zeta' = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

In Folge dieser Gleichungen (4) findet man aber

$$\xi = \xi'$$
$$\eta = \eta'$$
$$\zeta = \zeta'$$

folglich:

,,In jedem auf bewegliche Axen bezogenen idealen Coordinatensystem fällt die instantane Drehungsaxe stets mit dem Radius Vector des Planeten oder Satelliten zusammen.“

Da zufolge des Vorhergehenden die dritte Bedingung, die nöthig ist, um ein System idealer Coordinaten zu fixiren, willkührlich ist, so werde ich im Folgenden als solche die Gleichung

$$Z = 0$$

anwenden, es soll demnach die Ebene der X Y stets durch den Radius Vector gehen. Die Gleichungen (4) geben hiermit $A = 0$, das ist

$$0 = \beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha'', \text{ oder } 0 = \alpha d\beta + \alpha' d\beta' + \alpha'' d\beta''$$

Verbinden wir die erste dieser Gleichungen mit

$$0 = \alpha d\alpha + \alpha' d\alpha' + \alpha'' d\alpha''$$

die zweite mit

$$0 = \beta d\beta + \beta' d\beta' + \beta'' d\beta''$$

und nehmen auf die Gleichungen

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \gamma''; \quad \alpha''\beta - \alpha\beta'' = \gamma'; \quad \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = \gamma$$

Rücksicht, so ergiebt sich

$$0 = \gamma'' d\alpha' - \gamma' d\alpha''; \quad 0 = \gamma'' d\alpha - \gamma d\alpha''$$
$$0 = \gamma'' d\beta' - \gamma' d\beta''; \quad 0 = \gamma'' d\beta - \gamma d\beta''$$

Wir haben hiermit die merkwürdige Proportion

$$(5) \quad . \; . \; . \quad d\alpha : d\alpha' : d\alpha'' = d\beta : d\beta' : d\beta'' = \gamma : \gamma' : \gamma''$$

erhalten. Hieraus folgt

$$(6) \quad \begin{cases} \gamma d\alpha + \gamma' d\alpha' + \gamma'' d\alpha'' = \frac{d\alpha''}{\gamma''} \\ \gamma d\beta + \gamma' d\beta' + \gamma'' d\beta'' = \frac{d\beta''}{\gamma''} \end{cases}$$

Substituirt man diese in $0 = BX - CY$, so erhält man

$$(7) \quad . \; . \; . \quad 0 = X d\alpha'' + Y d\beta''$$

Die ersten Differentiale der Gleichungen (1) sind, nachdem wir $Z = 0$ gemacht haben:

$$dX = \alpha dx + \alpha' dy + \alpha'' dz$$
$$dY = \beta dx + \beta' dy + \beta'' dz$$
$$0 = \gamma dx + \gamma' dy + \gamma'' dz$$

Die Proportion (5) giebt uns nun

$$d\alpha dx + d\alpha' dy + d\alpha'' dz = \frac{d\alpha''}{\gamma''}(\gamma dx + \gamma' dy + \gamma'' dz) = 0$$
$$d\beta dx + d\beta' dy + d\beta'' dz = \frac{d\beta''}{\gamma''}(\gamma dx + \gamma' dy + \gamma'' dz) = 0$$

Die zweiten Differentiale der Gleichungen (1) werden daher

$$d^2X = \alpha d^2x + \alpha' d^2y + \alpha'' d^2z$$
$$d^2Y = \beta d^2x + \beta' d^2y + \beta'' d^2z$$
$$-(d\gamma dx + d\gamma' dy + d\gamma'' dz) = \gamma d^2x + \gamma' d^2y + \gamma'' d^2z$$

Es haben demnach nicht bloss die ersten, sondern auch die zweiten Differentiale von X und Y in der gestörten Bahn dieselbe Form wie in der ungestörten. Durch Zuziehung der Gleichung

$$\gamma d\gamma + \gamma' d\gamma' + \gamma'' d\gamma'' = 0$$

geben die (6), die man auch wie folgt

$$\alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' + \alpha'' d\gamma'' = -\frac{d\alpha''}{\gamma''}$$
$$\beta d\gamma + \beta' d\gamma' + \beta'' d\gamma'' = -\frac{d\beta''}{\gamma''}$$

stellen kann,

$$d\gamma = -\frac{\alpha d\alpha'' + \beta d\beta''}{\gamma''}; \quad d\gamma' = -\frac{\alpha' d\alpha'' + \beta' d\beta''}{\gamma''}; \quad d\gamma'' = -\frac{\alpha'' d\alpha'' + \beta'' d\beta''}{\gamma''}$$

und hiermit geht die dritte der vorstehenden Gleichungen in

$$\frac{1}{\gamma''}\left\{d\alpha'' dX + d\beta'' dY\right\} = \gamma d^2x + \gamma' d^2y + \gamma'' d^2z$$

über, die in Verbindung mit (7) die Differentiale von α'' und

β'' bestimmt. Nennen wir nun den Radius Vector des Planeten oder Satelliten r, die Störungsfunction Ω, und setzen die Summe der Massen des gestörten Körpers und des Centralkörpers $= 1$, dann sind die Gleichungen der Bewegung die folgenden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = \left(\frac{d\Omega}{dx}\right)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} = \left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} = \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$$

wo Ω als Function von x, y, z betrachtet werden muss. Setzen wir wieder für einen Augenblick $Z = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z$, so können wir Ω auch als Function von X, Y, Z betrachten, und erhalten

$$\left(\frac{d\Omega}{dX}\right) = \alpha \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \alpha' \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) + \alpha'' \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dY}\right) = \beta \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \beta' \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) + \beta'' \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \gamma \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) + \gamma' \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) + \gamma'' \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$$

Für die Anwendung dieser partiellen Differentialquotienten auf unser Coordinatensystem X, Y, 0 ist weiter nichts zu thun, wie nach der Differentiation $Z = 0$ zu machen.

Die vorstehenden Gleichungen geben nun sofort

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{X}{r^3} &= \left(\frac{d\Omega}{dX}\right) \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{Y}{r^3} &= \left(\frac{d\Omega}{dY}\right) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

welche genau dieselbe Form haben wie die für d^2x und d^2y. Ferner

$$\frac{d\alpha''}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\beta''}{dt}\frac{dY}{dt} = \gamma'' \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

welche in Verbindung mit (7)

$$\left(X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}\right)\frac{d\alpha''}{dt} = -\gamma'' Y \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$
$$\left(X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}\right)\frac{d\beta''}{dt} = \gamma'' X \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

geben. Nennen wir aber die mittlere Bewegung n, die halbe grosse Axe a, und die Excentricität e, dann zeigen die Gleichungen (8), dass in der gestörten Bewegung wie in der ungestörten

$$X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{an}$$

Bezeichnen wir den Winkel zwischen der Ebene der xy und der der XY mit i, dann ist $\gamma'' = \cos i$, folglich

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha''}{dt} = -\dfrac{an\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\, Y\left(\dfrac{d\Omega}{dZ}\right) \\ \dfrac{d\beta''}{dt} = \dfrac{an\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\, X\left(\dfrac{d\Omega}{dZ}\right) \end{cases}$$

Da

$$(9^*)\quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \alpha' X + \beta' Y \\ z = \alpha'' X + \beta'' Y \end{cases}$$

so hängt der Ort des Planeten im Raume von den Coordinaten X und Y, und von den sechs Cosinussen

$$\begin{matrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \end{matrix}$$

ab. Ich werde nun aber zeigen, dass die Veränderung von $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ von der Veränderung von α'' und β'' abhängt, dass folglich, wenn die constanten Theile der in diesen Cosinussen enthaltenen Elemente gegeben sind, der Ort im Raume bloss von X, Y, α'' und β'' abhängt. Wenn dieses bewiesen ist, so ist zugleich dargethan, dass durch die Integration der Gleichungen (8) und (9) und die Substitution dieser Integrale in (9*) der Ort des Planeten im Raume vollständig in Function der Zeit erhalten wird. Man kann dieses leicht durch Einführung der unabhängigen Winkel, von welchen α, β, etc. Functionen sind, zeigen. Sei zuerst

$$\frac{Y}{X} = tg v_1$$

dann wird

$$X = r\cos v_1, \quad Y = r\sin v_1$$

Erwägen wir nun, dass die instantane Drehungsaxe unsers Coordinatensystems stets mit dem Radius zusammen fällt, ferner, dass der Radius Vector stets in der Ebene der XY liegt, so folgt, dass diese Ebene stets durch die den Zeiten t und $t + dt$ angehörigen Radii Vectores r und $r + dr$ geht. Das Differential dv_1 ist daher der zwischen diesen Radii Vectores eingeschlossene Winkel, und v_1 selbst ist in der Ebene der XY der in der Richtung der Bewegung des Planeten sich von der Axe der positiven X bis zum Radius Vector r erstreckende Winkel. Ferner folgt

hieraus, dass die osculirenden Ellipsen, in welchen sich der Planet oder Satellit in jedem Zeittheilchen dt bewegt, alle in der Ebene der XY liegen. Nennen wir nun für die Zeit t die wahre Anomalie des Planeten f, und setzen

$$v_1 = f + \chi$$

so ist χ der in der Ebene der XY sich in der Richtung der Bewegung von der positiven Axe der X bis zum gleichzeitigen Perihel erstreckende Winkel. Die Neigung der Ebene der XY gegen die der xy haben wir oben schon i genannt; sei ferner θ der in der Ebene der xy sich in der Richtung der Bewegung von der Axe der positiven x bis zu dem Theile der Durchschnittslinie der Ebenen der xy und XY sich erstreckende Winkel, durch den der Radius Vector geht, wenn die z vom Negativen ins Positive übergehen; sei endlich ω der in der Ebene der XY sich von dem genannten Theile der Durchschnittslinie der Ebenen der XY und xy bis zum Perihel erstreckende Winkel; dann findet man für α, β, etc. folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\sigma\cos\theta + \sin\sigma\sin\theta\cos i \\
\beta &= \sin\sigma\cos\theta - \cos\sigma\sin\theta\cos i \\
\gamma &= \sin\theta\sin i \\
\alpha' &= \cos\sigma\sin\theta - \sin\sigma\cos\theta\cos i \\
\beta' &= \sin\sigma\sin\theta + \cos\sigma\cos\theta\cos i \\
\gamma' &= -\cos\theta\sin i \\
\alpha'' &= -\sin\sigma\sin i \\
\beta'' &= \cos\sigma\sin i \\
\gamma'' &= \cos i
\end{aligned}$$

wo $\sigma = \chi - \omega$ gesetzt ist. Aus den vorstehenden Erklärungen ergiebt sich, dass σ der Winkel ist, welcher sich von der positiven Axe der X bis zum genannten Theile der Durchschnittslinie der Ebenen der XY und xy erstreckt. Die Differentiation der vorstehenden Gleichungen giebt

$$\begin{aligned}
d\alpha &= -\beta d\sigma - \alpha' d\theta - \gamma\sin\sigma\, di \\
d\alpha' &= -\beta' d\sigma + \alpha d\theta - \gamma'\sin\sigma\, di \\
d\alpha'' &= -\beta'' d\sigma \qquad\qquad - \gamma''\sin\sigma\, di
\end{aligned}$$

Substituirt man diese in die Gleichung

$$0 = \beta d\alpha + \beta' d\alpha' + \beta'' d\alpha''$$

so erhält man

$$d\sigma = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\, d\theta = \cos i . d\theta$$

und wegen der Gleichung $\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$ müssen die Differentiale von β, β', β'', wenn man sie in die Gleichung

$$0 = \alpha d\beta + \alpha' d\beta' + \alpha'' d\beta''$$

substituirt, nothwendig auf dieselbe Relation führen. Die eben gefundene Gleichung

$$(10) \quad \ldots \quad d\theta = \frac{d\sigma}{\cos i}$$

zeigt, dass die Veränderung des Winkels θ von der Veränderung der Winkel i und σ abhängt. Von den drei Winkeln, die die obigen Ausdrücke von α, β, etc. enthalten, sind nur die Veränderungen von zweien von einander unabhängig. Nehmen wir für diese i und σ an, so sind zwar die Veränderungen von α'' und β'' auch von einander unabhängig, aber die Veränderungen der übrigen sieben Cosinusse α, β, etc. sind von den Veränderungen von α'' und β'' abhängig. W. z. b. w.

Von den constanten Theilen der Elemente bemerke ich Folgendes. Die Integration der Gleichungen (8) führt vier Constanten ein, und diese sind die für die Zeit $t = 0$ stattfindenden Werthe der mittleren Anomalie, der halben grossen Axe, der Excentricität und des Winkels χ. Die Integration der Gleichungen (9) führt die für $t=0$ stattfindenden Werthe von $-\sin\sigma\sin i$ und $\cos\sigma\sin i$ ein. Die für $t=0$ stattfindende Knotenlänge θ erscheint in diesen Integralen gar nicht, sie erscheint erst, wenn man nach der Integration jener Gleichungen auch (10) integrirt, welcher sie als willkührliche Constante hinzugefügt werden muss; die Integration von (10) führt jedenfalls auf eine Quadratur. Bei der Bestimmung dieser Constanten durch astronomische Beobachtungen bleibt aber χ und folglich auch σ unbestimmt, denn man erhält durch die Beobachtungen von den letztgenannten Winkeln nur i, θ und ω. Es ist aber leicht a priori einzusehen, dass χ in der That unbestimmt bleiben muss, denn es wird durch das constante Glied dieses Winkels nichts weiter bestimmt, wie die Lage der Axe der X in der Ebene der XY für $t = 0$, und diese Lage ist in der That willkührlich. Die angemessenste Bestimmung, die man darüber treffen kann, ist die, dass die Länge des Planeten oder Satelliten in seiner Bahn für die Zeit $t = 0$ dem für dieselbe Zeit stattfindenden Werthe von v_1 gleich sein soll. Beziehen wir für einen Augenblick die betreffenden Grössen bloss auf diesen Zeitpunkt und nennen die Länge in der Bahn v, dann ist

$$v = f + \omega + \theta$$

Setzen wir diesen Ausdruck dem $v_1 = f + \chi$ gleich, so ergiebt sich für die constanten Glieder

$$\chi = \omega + \theta, \text{ und also } \sigma = \theta$$

womit alle Constanten bestimmt sind. Betrachten wir von nun an wieder alle Grössen als für die Zeit t überhaupt geltend.

Es ist noch übrig, x, y, z in Function von X, Y, α'' β'' darzustellen; dieses kann durch Zuziehung einer Quadratur, die sich aus der Gleichung (10) ergiebt, bewerkstelligt werden. Wir haben sofort

$$z = \alpha'' X + \beta'' Y$$

Machen wir nun

$$\theta - \sigma = \Lambda$$

dann geben die obigen Ausdrücke für α, β, etc. leicht

$$\alpha' \cos \Lambda - \alpha \sin \Lambda = \sin\sigma \cos\sigma \,(1 - \cos i) = -\frac{\alpha''\beta''}{1 + \cos i}$$

$$\beta' \cos \Lambda - \beta \sin \Lambda = \sin^2\sigma + \cos^2\sigma \cos i = 1 - \frac{\beta''^2}{1 + \cos i}$$

$$\alpha \cos \Lambda + \alpha' \sin \Lambda = \cos^2\sigma + \sin^2\sigma \cos i = 1 - \frac{\alpha''^2}{1 + \cos i}$$

$$\beta \cos \Lambda + \beta' \sin \Lambda = \sin\sigma \cos\sigma \,(1 - \cos i) = -\frac{\alpha''\beta''}{1 + \cos i}$$

und hiermit erhalten wir sogleich

$$\left.\begin{aligned} y\cos\Lambda - x\sin\Lambda &= Y - \beta''\frac{\alpha'' X + \beta'' Y}{1 + \cos i} = Y - \frac{\beta'' z}{1 + \cos i} \\ x\cos\Lambda + y\sin\Lambda &= X - \alpha''\frac{\alpha'' X + \beta'' Y}{1 + \cos i} = X - \frac{\alpha'' z}{1 + \cos i} \end{aligned}\right\} (11)$$

woraus man durch Multiplicationen mit $\sin \Lambda$ und $\cos \Lambda$ die Ausdrücke für x und y selbst erhalten kann. Um die vorstehenden Ausdrücke vollständig auf X, Y, α'' und β'' zu bringen, ist noch übrig, Λ und $\cos i$ durch α'' und β'' auszudrücken.

Es ist sogleich

$$\cos i = \sqrt{1 - \alpha''^2 - \beta''^2}$$

und von Λ können wir das Differential durch α'' und β'' nebst deren Differentialen ausdrücken. Zu dem Ende giebt die Gleichung (10)

$$d\Lambda = \frac{1 - \cos i}{\cos i}\, d\sigma$$

und aus den Ausdrücken für α'' und β'' findet man

$$d\sigma = \frac{\alpha'' d\beta'' - \beta'' d\alpha''}{\sin^2 i}$$

Hiermit wird

$$\Lambda = \int \frac{\alpha'' d\beta'' - \beta'' d\alpha''}{(1 + \cos i) \cos i}$$

wo dem Vorhergehenden zufolge die hinzuzufügende Constante

so bestimmt werden muss, dass $\Lambda = 0$, für $t = 0$ wird. Da diesem zufolge x, y, z als Functionen von X, Y, α'', β'' betrachtet werden dürfen, so darf man auch die Störungsfunction als Function derselben Grösse betrachten. Ich finde

$$\left(\frac{dx}{d\alpha''}\right) = \frac{\gamma}{\gamma''} X; \quad \left(\frac{dy}{d\alpha''}\right) = \frac{\gamma'}{\gamma''} X; \quad \left(\frac{dz}{d\alpha''}\right) = X$$

$$\left(\frac{dx}{d\beta''}\right) = \frac{\gamma}{\gamma''} Y; \quad \left(\frac{dy}{d\beta''}\right) = \frac{\gamma'}{\gamma''} Y; \quad \left(\frac{dz}{d\beta''}\right) = Y$$

und hieraus folgt

$$X\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \cos i \left(\frac{d\Omega}{d\alpha''}\right); \quad Y\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \cos i \left(\frac{d\Omega}{d\beta''}\right)$$

wodurch die Gleichungen (9) in folgende übergehen

$$\frac{d\alpha''}{dt} = -\frac{an\cos^2 i}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{d\beta''}\right)$$

$$\frac{d\beta''}{dt} = \frac{an\cos^2 i}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\Omega}{d\alpha''}\right)$$

Die Grössen v_1, χ, α'', β'' sind dieselben, die ich in den „*Fundamenta* etc." eingeführt habe, nur ist dort $-p$ statt α'' und q statt β'' geschrieben. Diese sowohl wie alle andern in diesem Buche eingeführten Grössen finden durch die vorstehende Analyse ihre geometrische Bedeutung. Nennen wir den Winkel, den der Radius Vector mit der xy Ebene macht, b, und den in dieser Ebene sich von der positiven Axe der x bis zur Projection des Radius Vector erstreckenden Winkel l, dann geben die Gleichungen (11)

$$(12) \quad \begin{cases} \cos b \sin(l - \Lambda) = \sin v_1 - \dfrac{\beta'' \sin b}{1 + \cos i} \\ \cos b \cos(l - \Lambda) = \cos v_1 - \dfrac{\alpha'' \sin b}{1 + \cos i} \\ \sin b = \beta'' \sin v_1 + \alpha'' \cos v_1 \end{cases}$$

woraus man schliesslich l und b berechnen kann. Diese Gleichungen haben, wie alle andern, die man bisher gehabt hat, die Unbequemlichkeit, dass sie die die Lage der Bahn bestimmenden, von den störenden Kräften abhängigen Glieder mit den von diesen Kräften unabhängigen vermischt enthalten; sie sind aber einer merkwürdigen Transformation fähig, wodurch diese Glieder von einander abgesondert werden. Um diese Transformation auszuführen, wollen wir in die vorstehenden Gleichungen für α'' und β'' ihre obigen Werthe, so wie für Λ seinen Werth $\theta - \sigma$ setzen. Dadurch verwandelt man sie leicht in folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \cos b \sin (l-\theta) = \cos i \sin (v_1 - \sigma) \\ \cos b \cos (l-\theta) = \cos (v_1 - \sigma) \\ \sin b = \sin i \sin (v_1 - \sigma) \end{array}\right\} \quad (13)$$

die wir auch durch die sphärische Trigonometrie hätten unmittelbar finden können. Diese Gleichungen, und folglich auch die (12), werde ich nun auf folgende Form bringen

$$\left.\begin{array}{l} \cos b \sin (l-w) = \cos b_0 \sin (l_0 - \theta_0 - w_0) - A (\sin b - \sin b_0) \\ \cos b \cos (l-w) = \cos b_0 \cos (l_0 - \theta_0 - w_0) \\ \sin b = \sin b_0 + (\sin b - \sin b_0) \\ \quad \text{wo} \\ \cos b_0 \sin (l_0 - \theta_0) = \cos i_0 \sin (v_1 - \theta_0) \\ \cos b_0 \cos (l_0 - \theta_0) = \cos (v_1 - \theta_0) \\ \sin b_0 = \sin i_0 \sin (v_1 - \theta_0) \end{array}\right\} (14)$$

und die eingeführten Grössen A, w, w_0, i_0 so bestimmt werden sollen, dass sie von v_1 unabhängig seien. Dass θ_0 willkührlich bleiben muss, ist leicht ohne Weiteres zu erkennen. Bringen wir die beiden ersten Gleichungen (13) und (14) auf die Form $P \sin (v_1 - \theta_0) + Q \cos (v_1 - \theta_0)$ und vergleichen die Coefficienten von $\sin (v_1 - \theta_0)$ $\cos (v_1 - \theta_0)$ in den verschiedenen Gleichungen mit einander, so erhalten wir folgende vier Gleichungen:

$$\sin (\sigma - \theta_0) \sin (\theta - w) + \cos (\sigma - \theta_0) \cos (\theta - w) \cos i = \cos w_0 \cos i_0 - A [\sin i \cos (\sigma - \theta_0) - \sin i_0]$$

$$\cos (\sigma - \theta_0) \sin (\theta - w) - \sin (\sigma - \theta_0) \cos (\theta - w) \cos i = - \sin w_0 + A \sin i \sin (\sigma - \theta_0)$$

$$\sin (\sigma - \theta_0) \cos (\theta - w) - \cos (\sigma - \theta_0) \sin (\theta - w) \cos i = \sin w_0 \cos i_0$$

$$\cos (\sigma - \theta_0) \cos (\theta - w) + \sin (\sigma - \theta_0) \sin (\theta - w) \cos i = \cos w_0$$

aus welchen A, w, w_0 und i_0 bestimmt werden müssen. Durch Multiplicationen mit $\sin (\sigma - \theta_0)$ und $\cos (\sigma - \theta_0)$ und durch Additionen und Subtractionen verwandelt man diese leicht in die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} \sin (\sigma - \theta_0) \sin w_0 + \cos (\sigma - \theta_0) \cos w_0 \cos i_0 = \\ \qquad \cos (\theta - w) \cos i - A [\sin i_0 \cos (\sigma - \theta_0) - \sin i] \\ \cos (\sigma - \theta_0) \sin w_0 - \sin (\sigma - \theta_0) \cos w_0 \cos i_0 = \\ \qquad - \sin (\theta - w) + A \sin i_0 \sin (\sigma - \theta_0) \\ \sin (\sigma - \theta_0) \cos w_0 - \cos (\sigma - \theta_0) \sin w_0 \cos i_0 = \sin (\theta - w) \cos i \\ \cos (\sigma - \theta_0) \cos w_0 + \sin (\sigma - \theta_0) \sin w_0 \cos i_0 = \cos (\theta - w) \end{array}\right\} (15)$$

Vergleicht man diese mit den vorstehenden, so findet man, dass die einen in die andern übergehen, wenn man w_0 und $\theta - w$, so wie i und i_0 mit einander vertauscht. Hieraus folgt, dass wir einen Ausdruck für $\theta - w$ nicht direct abzuleiten brauchen,

sondern dass wir diesen aus dem für w_0 erhalten werden, wenn wir darin i und i_0 mit einander vertauschen. Eliminiren wir nun A aus den vorstehenden Gleichungen, so ergiebt sich

$$[\sin i_0 - \sin i \cos(\sigma-\theta_0)] \sin w_0 + \cos i_0 \sin i \sin(\sigma-\theta_0) \cos w_0 =$$
$$[\sin i - \sin i_0 \cos(\sigma-\theta_0)] \sin(\theta-w) + \cos i \sin i_0 \sin(\sigma-\theta_0) \cos(\theta-w)$$

Multipliciren wir die vierte mit $\sin i - \sin i_0 \cos(\sigma-\theta_0)$, die dritte mit $\sin i_0 \sin(\sigma-\theta_0)$ und subtrahiren, so entsteht:

$$-[\sin i_0 - \sin i \cos(\sigma-\theta_0)] \cos w_0 + \cos i_0 \sin i \sin(\sigma-\theta_0) \sin w_0 =$$
$$[\sin i - \sin i_0 \cos(\sigma-\theta_0)] \cos(\theta-w) - \cos i \sin i_0 \sin(\sigma-\theta_0) \sin(\theta-w)$$

Wenn wir die Quadrate dieser beiden Gleichungen addiren, so verschwindet sowohl w_0 wie $\theta-w$, und wir erhalten zur Bestimmung von i_0 die folgende Gleichung:

$$[\sin i_0 - \sin i \cos(\sigma-\theta_0)]^2 + [\cos i_0 \sin i \sin(\sigma-\theta_0)]^2 =$$
$$[\sin i - \sin i_0 \cos(\sigma-\theta_0)]^2 + [\cos i \sin i_0 \sin(\sigma-\theta_0)]^2$$

Die Entwickelung dieser Gleichung zeigt aber, dass sie identisch ist, und dass folglich i_0 nicht minder wie θ_0 willkührlich bleibt.

Die Gleichungen (15) können wir nun auf folgende Form bringen:

$$(16)\begin{cases}\sin(\sigma-\theta_0) = \sin(w_0-w+\theta)\cos i - A \sin w_0 [\sin i_0 \cos(\sigma-\theta_0) - \sin i] \\ \cos(\sigma-\theta_0)\cos i_0 = \cos(w_0-w_0+\theta)\cos i - A \cos w_0 [\sin i_0 \cos(\sigma-\theta_0) - \sin i] \\ \cos(\sigma-\theta_0)\cos i = \cos(w_0-w+\theta)\cos i + A \sin w_0 \cos i \sin i_0 \sin(\sigma-\theta_0) \\ \sin(\sigma-\theta_0)\cos i \cos i_0 = \sin(w_0-w+\theta)\cos i - A \cos w_0 \cos i \sin i_0 \sin(\sigma-\theta_0)\end{cases}$$

aus welchen man durch Subtraction $\theta-w$ eliminiren kann. Wenn man in den so entstehenden zwei Gleichungen wechselsweise $\sin w_0$ und $\cos w_0$ eliminirt und erwägt, dass

$$[\sin i_0 \cos(\sigma-\theta_0) - \sin i]^2 + [\cos i \sin i_0 \sin(\sigma-\theta_0)]^2 =$$
$$[1 - \cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma-\theta_0)][1 + \cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma-\theta_0)]$$

identisch ist, so erhält man leicht

$$(17)\begin{cases} A \sin w_0 = \dfrac{\sin i \sin(\sigma-\theta_0)}{k} \\ A \cos w_0 = \dfrac{\cos i \sin i_0 + \sin i \cos i_0 \cos(\sigma-\theta_0)}{k}\end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$k = 1 + \cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma-\theta_0)$$

gesetzt ist. In Folge der obigen Bemerkung erhalten wir zugleich

$$A \sin(\theta-w) = \frac{\sin i_0 \sin(\sigma-\theta_0)}{k}$$

$$A \cos(\theta-w) = \frac{\cos i_0 \sin i + \sin i_0 \cos i \cos(\sigma-\theta_0)}{k}$$

womit die Aufgabe gelöst ist, da die vorstehenden Gleichungen die unbekannten Grössen A, w und w_0 geben. Wenn man nun die durch i_0 und θ_0 gegebene willkührliche Ebene so bestimmt, dass

i_0 dem für $t = 0$ geltenden Werthe von i
und θ_0 dem für $t = 0$ geltenden Werthe von σ

gleich ist, so sind $\sin b - \sin b_0$, w_0 und $\theta - w$ kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte, und in den Gleichungen (14) von den übrigen getrennt.

Man kann diese Auflösung auf eine andere, elegantere Form bringen. Substituirt man die Gleichungen (17) in die beiden letzten Gleichungen (16), so bekommt man

$$\sin(\theta - \Pi) = \frac{\cos i + \cos i_0}{k} \sin(\sigma - \theta_0)$$

$$\cos(\theta - \Pi) = \frac{(1 + \cos i \cos i_0) \cos(\sigma - \theta_0) - \sin i \sin i_0}{k}$$

wo ich $\Pi = w - w_0$ gesetzt habe. Differentiirt man diese Gleichungen, indem man i, σ und θ veränderlich setzt und dabei auf die Gleichung (10) Rücksicht nimmt, so bekommt man leicht

$$d\Pi = -\frac{\sin i_0 \sin(\sigma - \theta_0)}{k} d\,i + \frac{\sin i - \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0)}{k \cos i} \sin i . d\sigma \quad (18)$$

Setzen wir nun

$$p = \sin i \sin(\sigma - \theta_0)$$
$$q = \sin i \cos(\sigma - \theta_0)$$
$$q_0 = q - \sin i_0$$
$$s_0 = q_0 \sin(v_1 - \theta_0) - p \cos(v_1 - \theta_0)$$

und substituiren diese in (18), (17) und (14), so erhalten wir statt der Gleichungen (12) folgende Transformation derselben:

$$\cos b \sin(l - \Pi) = \cos i_0 \sin(v_1 - \theta_0) - s_0 \left\{ \operatorname{tg} i_0 + \frac{q_0}{k \cos i_0} \right\}$$

$$\cos b \cos(l - \Pi) = \cos(v_1 - \theta_0) + s_0 \frac{p}{k}$$

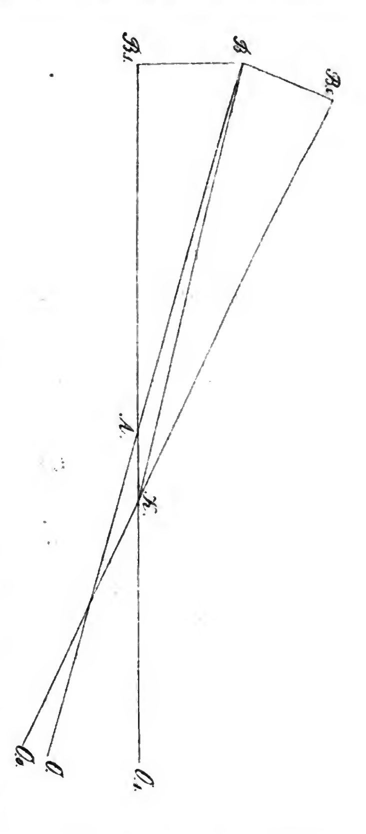
$$\sin b = \sin i_0 \sin(v_1 - \theta_0) + s_0$$

$$k = 1 + \cos i \cos i_0 - q \sin i_0$$

$$\Pi = c + \int \frac{q_0 dp - p dq_0}{k \cos i}$$

wo die Differentiale in Bezug auf die Zeit verstanden werden müssen, und die Constante c der für $t = 0$ geltende Werth von θ ist. Treffen wir nun wieder für die willkührlichen Grössen i_0 und θ_0 die eben angeführte Bestimmung, so werden p und q_0,

und folglich auch s_0 und $\Pi - c$ kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte, die in den vorstehenden Formeln von den übrigen Grössen getrennt siud. Man kann die Functionen $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{k \cos i}$, die hier vorkommen, nach Umständen entweder in endlicher Form, oder in unendliche, nach den Potenzen von p und p_0 fortschreitende Reihen aufgelöst, anwenden.



Jacobi entwarf, nachdem ich ihm diese Transformation mitgetheilt hatte, von dem ersten Theile derselben folgende elegante Construction, aus welcher die Bedeutung der Grössen, die ich auf analytischem Wege gefunden habe, hervorgeht.

In der nebenstehenden Figur bedeuten alle Linien grösste Kreise auf der Kugeloberfläche. Bei B_0 und B_1 sind rechte Winkel. Die Linie $B_1 O_1$ bezeichnet die Ebene der xy, und der Punkt O_1 den Durchschnittspunkt der positiven x Axe mit der Kugeloberfläche; die Linie BO bezeichnet die Ebene der XY, der Punkt O den Durchschnittspunkt der positiven X Axe, und der Punkt B den Durchschnittspunkt des Radius Vector mit der Kugeloberfläche. $B_0 O_0$ ist ein beliebiger grösster Kreis, welcher den im Vorher-

gehenden durch die willkührlichen Grössen i_0 und θ_0 gegebenen bezeichnen soll.

Dieses vorausgesetzt, ist

$$w_0 = KA_0;\; w = KO_1;\; A = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(B_0KB_1);\; \Pi = KO_1 - KA_0$$

Um den Beweis davon zu führen, bemerke ich, dass in Folge der vorstehenden Erklärungen

$$BO = v_1;\; AO = \sigma;\; BAB_1 = i$$
$$B_1O_1 = l;\; BB_1 = b;\; AO_1 = \theta$$
$$B_0O_0 = l_0;\; BB_0 = b_0;\; B_0A_0B = i_0;\; A_0O = A_0O_0 = \theta_0$$

Ziehen wir die Hülfslinie BK und nennen

$$BK = \lambda;\; B_1KB = \beta;\; BKB_0 = \beta_0;\; B_0KB_1 = \beta + \beta_0 = \eta$$

Hieraus folgt

$$B_0K = l_0 - \theta_0 - w_0;\quad B_1K = l - w$$

Die Dreiecke B_0KB und B_1KB geben nun

$$\cos\lambda = \cos b \cos(l - w) \;.\;.\;.\;.\;.\; (a)$$
$$\cos\lambda = \cos b_0 \cos(l_0 - \theta_0 - w_0) \;.\; (b)$$
$$\sin\lambda\cos\beta = \cos b \sin(l - w) \;.\;.\;.\;.\;.\; (c)$$
$$\sin\lambda\cos\beta_0 = \cos b_0 \sin(l_0 - \theta_0 - w_0) \;.\; (d)$$
$$\sin\lambda\sin\beta = \sin b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (e)$$
$$\sin\lambda\sin\beta_0 = \sin b_0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (f)$$

und es ist identisch

$$\cos\beta = \cos\beta_0 - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\eta(\sin\beta - \sin\beta_0)\; (g)$$

Aus den Gleichungen (a) und (b) folgt sogleich

$$\cos b\cos(l - w) = \cos b_0 \cos(l_0 - \theta_0 - w_0)$$

und aus den (c) und (d) in Verbindung mit (e), (f) und (g)

$$\begin{aligned}\cos b\sin(l - w) &= \sin\lambda\cos\beta_0 - \sin\lambda\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\eta(\sin\beta - \sin\beta_0)\\ &= \cos b_0\sin(l_0 - \theta_0 - w_0) - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\eta(\sin b - \sin b_0)\end{aligned}$$

welche mit den Gleichungen (14) identisch sind.

Da in dem Dreiecke AKA_0

$$AA_0 = \sigma - \theta_0;\quad AK = \theta - w;\quad A_0K = w_0$$
$$AKA_0 = 180^0 - \eta;\quad AA_0K = i_0;\quad A_0AK = i$$

ist, so erhalten wir hier zur Bestimmung von w, w_0 und η folgende Gleichungen

$$\cos\tfrac{1}{2}\eta\sin\tfrac{1}{2}(\theta - w + w_0) = \cos\tfrac{1}{2}(i_0 - i)\sin\tfrac{1}{2}(\sigma - \theta_0)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\eta\cos\tfrac{1}{2}(\theta - w + w_0) = \cos\tfrac{1}{2}(i_0 + i)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma - \theta_0)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\eta\sin\tfrac{1}{2}(\theta - w - w_0) = \sin\tfrac{1}{2}(i_0 - i)\sin\tfrac{1}{2}(\sigma - \theta_0)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\eta\cos\tfrac{1}{2}(\theta - w - w_0) = \sin\tfrac{1}{2}(i_0 + i)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma - \theta_0)$$

deren Identität mit den obigen Formeln für w, w_0 und A sich leicht nachweisen lässt. Es folgt aus dieser Construction, dass die durch i_0 und θ_0 gegebene Ebene keineswegs im Raume unveränderlich ist, sondern dass sie vielmehr zur Ebene der XY und der Axe der X eine unveränderliche Lage hat, und sich also mit dieser unveränderlich verbunden im Raume bewegt.

Alfred Wilhelm Volkmann, *Ueber die Kraft, welche in einem gereizten Muskel des animalen Lebens thätig ist.*

Ich habe in einer frühern Sitzung (vom 18. Jan.) mitgetheilt, dass die Bewegung eines gereizten Muskels eine gleichmässig verlangsamte sei.

Die Beobachtung, auf welche diese Angabe sich stützt, ist folgende. Ein Muskel ist lothrecht neben einem Cylinder aufgehangen, welcher sich mit gleichmässiger Geschwindigkeit um seine senkrechte Axe dreht. Der Cylinder ist mit berusstem Papiere überzogen und ein am untern Ende des Muskels angehangenes Stäbchen zeichnet mit einer rechtwinklig vorspringenden Spitze auf das Russpapier. Ist nun der Muskel ruhig, so entsteht auf dem Cylinder eine gerade, horizontale Linie, contrahirt sich dagegen der Muskel, so entsteht eine Parabel.

Die erwähnte gerade Linie ist also die Abscissenaxe der Curve, und zwar entsprechen 127 Millimeter dieser Axe dem Zeitraum einer Secunde. Dass die Curve sich über dieser Geraden bogenförmig erhebe, und dass eine Ordinate, welche von dem Scheitelpunkte dieses Bogens auf die Abscissenaxe gefällt wird, die Axe der Parabel darstelle, ist in meiner frühern Mittheilung schon bemerkt worden.

Die parabolische Gestalt der Muskelcurve führt zu so unerwarteten Folgerungen über die Natur der bewegenden Kräfte im Muskel, dass es der Mühe lohnt zu fragen, 1) ob den Beobachtungen zu Folge wirklich Parabeln oder nur den Parabeln ungefähr ähnliche Linien entstanden, und 2) inwieweit die Methode unserer Beobachtung Zutraun verdiene?

Ich werde die Beantwortung der zweiten Frage vorausschicken.

Die Curven, um welche es sich hier handelt, sind abhängig von der Bewegung des Cylinders um seine Axe, und es liegt am Tage, dass nur bei grösster Gleichmässigkeit dieser Bewegung eine genaue Bestimmung ihrer Bahnen möglich ist. Angestellte Beobachtungen haben mich belehrt, dass die Axendrehung des Cylinders wirklich eine höchst gleichmässige ist, und dass die kleinen Fehler, welche vorkommen, bei der relativ unvollkommenen Ausmessung der Abscissen und Ordinaten der Muskelcurven keine Berücksichtigung verdienen. Was nämlich die Messungen anlangt, so führe ich dieselben in folgender Weise aus.

Nach Vollendung einer Beobachtungsreihe schneide ich das auf den Cylinder gespannte Papier ab und fixire die im Russ ausgeführte Zeichnung mittelst einer Auflösung von etwas Mastix in Alkohol. Ist der Papierbogen getrocknet, so lege ich auf die zu messende Curve ein Glasmikrometer, welches durch ein doppeltes System horizontaler und verticaler Linien in Millimeter getheilt ist. Legt man das Mikrometer so auf, dass dessen unterster horizontaler Theilstrich die Abscissenaxe deckt, während der erste verticale Theilstrich mit dem Punkte zusammenfällt, wo sich die Curve über die Horizontale erhebt, so kann man die zusammengehörigen Abscissen und Ordinaten mit ziemlicher Genauigkeit bis auf $\frac{1}{10}$ Millimeter bestimmen, vorausgesetzt, dass man die Messung mit Hülfe einer scharfen Lupe ausführt.

Was die zweite Frage anlangt, ob den Beobachtungen zu Folge die Muskelcurven für strenge Parabeln gehalten werden dürfen, so lehrt in der Mehrzahl der Fälle schon der blosse Augenschein, dass dies nicht der Fall sei. Die Curve ist nämlich an der Stelle, wo sie sich über die Abscissenaxe zu erheben beginnt, nach unten convex und verändert sich erst in ihrem spätern Verlaufe in eine nach oben convexe Linie. In manchen Fällen ist allerdings die nach unten convexe Krümmung mit blossem Auge nicht wahrnehmbar, und in den meisten verhält sie sich nur als ein kleiner Theil der durch die Muskelcontraction bedingten aufsteigenden Curve.

Inwieweit nun die beobachteten Curven mit Parabeln übereinstimmen, wird sich aus den nachstehenden Tabellen ergeben, aber ehe ich diese mittheile, scheinen noch einige Vorbemerkungen nöthig.

Bekanntlich ist die Formel der Parabel, wenn deren Anfangspunkt unbekannt ist:

$$y^2 + ay = px$$

wo a den Anfangspunkt bedeutet. Da letzterer sich aus der unmittelbaren Betrachtung der Figur nicht genau genug ergiebt, so muss er aus den gemessenen Werthen x und y mit Hülfe der Gleichung entwickelt werden. Um die Unbekannten a und p genau zu bestimmen, hätte ich eigentlich alle Beobachtungen über die Werthe x und y in Rechnung bringen müssen, dies habe ich aber in der Mehrzahl der Fälle nicht gethan, woraus sich von selbst ergiebt, dass die Uebereinstimmung zwischen den von mir beobachteten und berechneten Werthen, oder mit andern Worten: die Uebereinstimmung meiner Muskelcurven mit Parabeln in der Berechnung noch etwas weniger hervortritt, als sie in Wirklichkeit vorhanden war.

Weiter ist zu bemerken, dass die Werthe x und y, deren wir zum Rechnen bedürfen, durch die Beobachtung nicht unmittelbar gegeben sind, sondern erst mittelst einer geeigneten Umsetzung der direct gemessenen Grössen der Abscissen und Ordinaten erhalten werden können. Dies liegt daran, dass sich die Werthe der Abscissen auf Entfernungen vom zeitlichen Anfangspunkte der Curve beziehen, während die Werthe von x Entfernungen vom mathematischen Anfangspunkte der Parabel bezeichnen. Diese beiden Punkte fallen nicht zusammen. Vielmehr liegt der zeitliche Anfangspunkt in der Abscissenaxe, der mathematische Anfangspunkt der Parabel dagegen im Scheitelpunkte der Curve, d. h. am obersten Ende der grössten Ordinate. Die Operation, durch welche die Werthe x und y gebildet werden, bedarf ihrer Einfachheit wegen keiner Erörterung.

Beobachtung am geraden Schenkelmuskel eines Frosches.

Abscissen.	Ordinaten.	y.	x.	x' berechnet.	Differenz.
1 Mill.	0,4 Mill.	1 Mill.	0,05 Mill.	0,05 Mill.	0,00 Mill.
2 »	0,8 »	2 »	0,1 »	0,14 »	+ 0,04 »
3 »	1,4 »	3 »	0,25 »	0,27 »	+ 0,02 »
4 »	1,9 »	4 »	0,40 »	0,45 »	+ 0,05 »
5 »	2,5 »	5 »	0,60 »	0,66 »	+ 0,06 »
6 »	3,1 »	6 »	0,9 »	0,92 »	+ 0,02 »
7 »	3,6 »	7 »	1,25 »	1,22 »	— 0,03 »
8 »	4,0 »	8 »	1,6 »	1,57 »	— 0,03 »

9 Mill.	4,4 Mill.	9 Mill.	2,0 Mill.	1,95 Mill.	0,05 Mill.
10 »	4,75 »	10 »	2,4 »	2,39 »	— 0,01 »
11 »	5,1 »	11 »	2,9 »	2,85 »	— 0,05 »
12 »	5,4 »	12 »	3,5 »	3,36 »	— 0,14 »
13 »	5,6 »	13 »	4,1 »	3,92 »	— 0,09 »
14 »	5,75 »	14 »	4,6 »	4,52 »	— 0,08 »
15 »	5,9 »	15 »	5,2 »	5,16 »	— 0,04 »
16 »	5,95 »	16 »	5,6 »	5,83 »	+ 0,23 »
17 »	60				

Beobachtung am longissimus colli einer testudo Graeca.

Abscisse.	Ordinate.	*y*.	*x*.	*x'* berechnet.	Differenz.
3 Mill.	1,65 Mill.	3 Mill.	0,18 Mill.	0,15 Mill.	— 0,03 Mill.
6 »	4,17 »	6 »	0,46 »	0,48 »	+ 0,02 »
9 »	5,9 »	9 »	0,93 »	0,99 »	+ 0,06 »
12 »	7,15 »	12 »	1,53 »	1,67 »	+ 0,14 »
15 »	8,02 »	15 »	2,40 »	2,53 »	+ 0,13 »
18 »	8,62 »	18 »	3,65 »	3,57 »	— 0,08 »
21 »	9,09 »	21 »	5,38 »	4,78 »	— 0,60 »
24 »	9,37 »	24 »	7,90 »	6,17 »	— 0,73 »
27 »	9,55 »				

Ich unterlasse es, weitere Beispiele anzuführen, und bemerke nur, dass der zuletzt mitgetheilte Fall derjenige ist, welcher unter allen von mir berechneten Curven die ungünstigsten Resultate giebt. *) Abstrahirt man von einer kleinen Strecke der Curve, welche deren zeitlichem Anfangspunkte zunächst liegt, so fallen die Differenzen der beobachteten und berechneten Werthe von x in die Beobachtungsfehler.

Nachdem nun bewiesen worden, dass die vom Muskel gezogene Curve sich merklich einer Parabel nähere, entsteht die Frage, wie man sich die Kraft des Muskels zu denken habe, welche eine solche Linie zu Stande bringt?

Am nächsten liegt es, diese Kraft mit der des explodirenden Schiesspulvers zu vergleichen. Die plötzlich expandirten Gase treiben eine Bombe in die Höhe, deren Bewegung unveränder-

*) Allerdings kommen Curven von ganz unregelmässiger Gestalt vor, welche ich als Ausnahme von der Regel jetzt unberücksichtigt lasse.

lich verharren müsste, wenn nicht die Schwerkraft ins Spiel träte. Durch die Schwere der Kugel wird eine gleichmässige Verlangsamung des Steigens und eben dadurch jene Veränderung ihrer Richtung bewirkt, welche in der Form der Parabel einen gesetzlichen Ausdrück findet.

Man könnte sagen, die Muskelkraft entwickle sich ebenfalls plötzlich, auch sie ertheile den bezüglichen Massen eine Bewegung, welche dem Beharrungsvermögen verfalle, aber wiederum sei es die Schwere, welche in den Gang des Geschehens eingreife und den parabolischen Zug der Curve zur Folge habe. Diese Anschauungsweise würde sogar die kleine Abweichung der Curve von der parabolischen Gestalt verständlich machen. Ich führte an, dass die Curve mit einer kleinen Convexität nach unten beginne. Diese Biegung nach unten beweist eine Beschleunigung der Bewegung und würde auf die rasch vorübergehende Entwickelung der Muskelkraft bezogen werden können.

Ehe ich nachweise, dass diese Ansicht einer wesentlichen Modification bedarf, werde ich die Beschreibung eines Versuches einschalten, welche der eben gegebenen Erklärung nur scheinbar entgegen steht.

Nach dem Rathe eines gelehrten Freundes versuchte ich die Schwere in meinen Experimenten zu eliminiren, da die parabolische Form der Curve, wenn sie wirklich von der Anziehungskraft der Erde abhing, in diesem Falle anscheinend fehlen musste. Die Ausführung dieses Vorschlages hatte keine Schwierigkeit. Ich brauchte nur alle Theile meines Apparats, welche bis dahin eine lothrechte Stellung gehabt hatten, in eine wagrechte Richtung zu brin en. Durch diese Veränderung wurde das zum Zeichnen dienende und an das untere Ende des Muskels befestigte Stäbchen in eine Art leichten Schlittens verwandelt. Der Muskel bekam ebenfalls eine wagerechte Lage und ruhte auf einer Glasplatte, welche durch Bestreichen mit Oel schlüpfrig gemacht worden war. Gleichwohl entstand auch in diesem Falle eine Parabel, wie die nachstehende Tabelle ausweist, und wie ich aus theoretischen Gründen im Voraus vermuthet hatte.

Muskelcurve bei horizontaler Lage des Muskels.

Abscisse.	Ordinate.	y.	x.	x' berechnet.	Differenz.
1 Mill.	0,47 Mill.	1 Mill.	0,07 Mill.	0,02 Mill.	— 0,05 Mill.
2 »	0,87 »	2 »	0,15 »	0,07 »	— 0,08 »
3 »	1,30 »	3 »	0,20 »	0,15 »	— 0,05 »
4 »	1,70 »	4 »	0,27 »	0,27 »	0,00 »
5 »	2,10 »	5 »	0,42 »	0,42 »	0,00 »
6 »	2,52 »	6 »	0,62 »	0,60 »	— 0,02 »
7 »	2,87 »	7 »	0,82 »	0,82 »	0,00 »
8 »	3,15 »	8 »	1,07 »	1,07 »	0,00 »
9 »	3,4 »	9 »	1,35 »	1,35 »	0,00 »
10 »	3,6 »	10 »	1,70 »	1,67 »	— 0,03 »
11 »	3,8 »	11 »	2,12 »	2,02 »	— 0,10 »
12 »	3,95 »	12 »	2,52 »	2,41 »	— 0,11 »
13 »	4,02 »	13 »	2,92 »	2,81 »	— 0,11 »
14 »	4,07 »	14 »	3,35 »	3,26 »	— 0,09 »
15 »	4,15 »	15 »	3,75 »	3,75 »	— 0,00 »
16 »	4,22 »				

Die Curve ist also trotz der Elimination der Schwerkraft eine Parabel, was damit zusammenhängt, dass das wagerecht gelegte Stäbchen, welches vom Muskel gezogen wird, unter dem Einflusse der Reibung steht. Da nämlich die Hemmung, welche ein sich reibender Körper erfährt, dem Raume proportional ist, durch welchen er hinstreicht, so würde das nach dem Gesetze der Trägheit sich bewegende Stäbchen eine gleichmässige Verlangsamung erfahren.

Die oben aufgestellte Erklärung, nach welcher die parabolische Form der Curve eine Folge der Schwerkraft ist, wird durch den eben mitgetheilten Versuch nicht in Frage gestellt. Der Einfluss der Schwere ist eliminirt worden, aber die Reibung, welche der Schwere entsprechend wirkt, ist für sie eingetreten.

Dagegen lässt sich die Unstatthaftigkeit der mehrerwähnten Erklärung auf andere Weise darthun.

Wir haben angenommen, die Muskelkraft entwickele sich in einem Minimum von Zeit, etwa wie eine Pulverexplosion, und theile den bezüglichen Massen eine Bewegung mit, welche nach dem Beharrungsvermögen fortdaure, bis sie durch die Gegenwirkung der Schwerkraft vernichtet sei. Wäre diese Voraussetzung richtig, so müsste die Hubhöhe des Muskels, $= h$, die

nun eine Wurfhöhe wäre, abhängig von dem Raume sein, den ein fallender Körper in einer gegebenen Zeit zurücklegt. Bekanntlich erhebt sich ein lothrecht in die Höhe geworfener Körper in der Zeit t so hoch, als' er in derselben Zeit fallen würde. Hierauf bezieht sich die Formel

$$h = t^2 g$$

wo g den Fallraum in einer Secunde bedeutet. Untersucht man nun die Hubhöhe des Muskels, welche durch die grösste Ordinate der Curve gemessen wird, so findet sich bei Anwendung der Formel, dass h überaus viel kleiner ist, als es nach der zum Aufsteigen verwendeten Zeit sein sollte. Demnach müsste die Kraft, welche den Muskel lothrecht nach unten zog, kleiner als die der Schwere sein.

Da nun gleichwohl der Muskel und das ihm anhängende Stäbchen unter dem Einflusse der Schwerkraft wirklich stehn, so bleibt nichts übrig als anzunehmen: dass ein Theil der stetig wirkenden Schwerkraft durch eine stetig wirkende Muskelkraft vernichtet werde.

Es hat keine Schwierigkeit, den Effect dieser gleichmässig wirkenden Muskelkraft, $= x$, zu bestimmen. Setzen wir

$$g - x = \gamma$$

so ist $x = g - \gamma$.

Nun ist g erfahrungsmässig $= 4890{,}2$ Millimeter, und γ ist aus unsern Curven ableitbar. Wir haben

$$h = t^2 \gamma$$

in welcher Gleichung h und t bekannt sind, denn h ist durch die Ordinate im Scheitelpunkte der Curve und t durch die zu ihr gehörige Abscisse gemessen. Wenden wir diese Gleichung auf die beiden weiter oben mitgetheilten Beobachtungsreihen an, so ergiebt sich:

für den Frosch $\gamma = 334{,}6$ Mill.; $x = 4555{,}6$ Mill.
für die Schildkröte $\gamma = 211{,}3$ » ; $x = 4678{,}9$ »

Man kann sich von der Muskelkraft keine vollständige Ansicht bilden, ohne auch die absteigende Seite der Curve zu berücksichtigen, die wir bis jetzt vernachlässigt haben. Wir fanden, dass die parabolische Gestalt der Curve das Dasein einer gleichmässigen beschleunigenden Muskelkraft von nicht unerheblichem Werthe beurkunde. Soll nun diese Kraft bis zum Scheitelpunkte der Curve fortdauern, dann aber plötzlich aufhören? Eine solche Annahme würde aller Wahrscheinlichkeit entbehren. Viel annehmlicher ist vorauszusetzen, dass jene Muskelkraft noch

längere Zeit fortwirke, und dass die aufsteigende Curve im Scheitelpunkte nur darum nach unten umwende, weil die Muskelkraft durch das Vorwiegen der Schwerkraft überwältigt werde.

Die Richtigkeit dieser zweiten Betrachtung ist aus meinen Curven sogar erweisbar. Hätte nämlich im Scheitelpunkte der Curve die Wirkung der nach oben treibenden Kraft aufgehört, und bliebe demnach die Schwerkraft, welche das Zurücksinken der Curve auf die Abscissenaxe verlangt, allein übrig, so müsste dieses Zurücksinken in unendlich kurzer Zeit erfolgen, da die Höhe, bis zu welcher der Muskel gestiegen, eine so überaus unbedeutende ist. In der Schildkröte betrug diese Höhe $= h =$ 9,55 Millimeter.

$$\text{Nun ist } \sqrt{\frac{h}{g}} = t$$
$$\text{also } t = 0{,}04419'''$$

Dagegen hatte, dem Versuche zu Folge, das Sinken etwas über 1''' gedauert. Nun könnte die Verzögerung des Sinkens auf den Einfluss der Reibung bezogen werden, wenn nicht Versuche, welche ich in meiner ersten Abhandlung mitgetheilt habe, eine solche Bezugnahme unmöglich machten.

Der Einfluss der Friction ist im Entferntesten nicht ausreichend, um das langsame Absteigen der Curve verständlich zu machen, und es wird hiermit wahrscheinlich, dass selbst während der Expansion des Muskels die Contraction fortdaure und einen Theil der Schwerkraft aufhebe.

INHALT.

Seite

Volkmann, über das Zustandekommen der Muskelcontractionen im Verlaufe der Zeit 1

Erdmann, über eine merkwürdige Structurveränderung bleihaltigen Zinnes 5

Derselbe, Mittheilung über Wagners Untersuchung der Moringerbsäure und ihrer Zersetzungsproducte 8

Derselbe, über die Zähigkeit des Lebens der *Tradescantia zebrina* 18

Möbius, über symmetrische Figuren 19

Reich, neue Versuche mit der Drehwage zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde 28

E. Weber, über den Mechanismus des Gehörorgans 29

D'Arrest, über die Gruppirung der periodischen Cometen . . . 31

Hansen, über ein neues Coordinatensystem 39

Volkmann, über die Kraft, welche in einem gereizten Muskel des animalen Lebens thätig ist 54

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1851.

II.

LEIPZIG.

WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.

1851.

SITZUNG AM 16. AUGUST 1851.

Eduard Friedr. Weber, *Ueber die Längenverhältnisse der Fleischfasern der Muskeln im Allgemeinen.*

Die animalischen Muskelfasern des menschlichen Körpers sind, ungeachtet ihre Länge an den Skelettmuskeln von 5 Millim. bis 453 Millim. differirt, dennoch allenthalben einem und demselben Verhältnisse proportional lang gemacht; dem Verhältnisse der Verkürzung, die sie durch die Annäherung ihrer Befestigungspunkte bei der Bewegung der Glieder erfahren. Das Verhältniss der Länge der Fleischfasern zu dieser ihrer Verkürzung ist = 1 : 0,47 und differirt, wenn überhaupt, nicht über 1 : 0,44 und nicht unter 1 : 0,62, ist daher jedenfalls sehr nahe wie 2 : 1.

Ich habe früher der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften einige allgemeine Resultate meiner Untersuchungen über das Verhältniss der Gewichte der Muskeln mitgetheilt*), welche man ebenso wie die Volumina als ein relatives Mass des ihnen zur Ausführung ihrer Functionen zugetheilten Nutzeffectes betrachten kann. Die Fleischsubstanz und der in ihr gegebene Nutzeffect können aber auf zwei verschiedene Weisen in den Muskeln verwendet sein, entweder zur Bildung längerer, aber proportio-

*) Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Cl. 1849. Heft 2. S. 79 – 86.

nal dünnerer Muskeln, welche grössere Bewegungen, aber mit verhältnissmässig geringerer Kraft ausführen können, oder kürzerer, proportional dickerer Muskeln, welche nur kleinere Bewegungen, aber mit verhältnissmässig grösserer Kraft ausführen können.

Ausser dem Gewichte kommen daher an den Muskeln noch zwei andere Grössen in Betracht, die *Faserlänge* der Muskeln als Mass der Grösse der Muskelbewegung und der *Querschnitt* der Muskeln als Mass der Muskelkraft. Da das Product der Länge mit dem Querschnitt der Muskeln ihrem Volumen und dieses multiplicirt durch das specifische Gewicht ihrem Gewichte gleich ist; so kann, wenn die eine beider Grössen bekannt ist, die andere aus ihr mit Hülfe des Gewichts berechnet werden. Es genügt daher, nächst dem Gewichte die wichtigere dieser beiden Grössen, die Länge der Fleischfasern, allein direct zu messen, die Querschnitte der Muskeln aber, welche sich gar nicht so unmittelbar messen lassen, aus den Längen und Gewichten der Muskeln zu berechnen. Solche Messungen habe ich an sämmtlichen Skelettmuskeln ausgeführt. Bei den Muskeln, welche aus ziemlich gleich langen Fleischbündeln bestehn, genügte es, die Länge der Fleischbündel nur an ein paar zweckmässig ausgewählten Stellen eines Muskels zu messen. Bei anderen Muskeln dagegen, die aus Bündeln von sehr verschiedener Länge bestehen, wurden oft, um ihre Längenverhältnisse zu bestimmen, sehr zahlreiche Messungen nothwendig, z. B. am *Multifidus spinae* allein 73. Alle diese Messungen wurden, um sie unter einander vergleichbar zu erhalten, an ein und demselben Körper ausgeführt, und ein späteres Mal ebenso noch an einem zweiten Körper wiederholt.

Da aber die gegenwärtige Mittheilung nur den Zweck hat, die Verhältnisse zu erörtern, von denen die Verschiedenheit der Faserlänge der Muskeln abhängt, so gehe ich hier nicht näher auf diese Messungen selbst ein, sondern begnüge mich, nur nach den am ersten Leichname ausgeführten Messungen eine tabellarische Uebersicht der mittleren Faserlängen der verschiedenen Muskeln, ihrer Gewichte und ihrer Querschnitte zu geben, letztere nach der Formel $S = \frac{P}{pL}$ berechnet, in der L die mittlere Länge der Fleischfasern des Muskels, P sein Gewicht, p das specifische Gewicht der Muskelsubstanz $= 0{,}1583$ bedeutet. Die Muskeln sind in der Tabelle nach ihrer Länge ge–

ordnet, die Namen der Kopf- und Rumpfmuskeln *) sind mit cursiven, die der Extremitätenmuskeln mit stehenden Lettern gedruckt.

*) Unter Extremitätenmuskeln verstehen wir hier alle Muskeln, welche sowohl die ganzen Extremitäten gegen den Rumpf, als auch ihre Theile gegen einander bewegen; unter Kopf- und Rumpfmuskeln diejenigen, welche die Theile derselben gegen einander bewegen.

Tabelle

der Längen, Gewichte und Querschnitte aller Muskeln ein und desselben männlichen Körpers.

	Längste Faser in Centim.	Kürzeste Faser in Centim.	Mittlere *) Länge in Centim.	Gewicht in Gramm.	Querschnitt in Quadrat-centim.
Sartorius	45.3	40.4	43.5	145.9	3.169
Rectus abdominis	29.7	20.0	26.47	131.65	4.700
Gracilis	30.5	20.5	25.5	111.0	4.413
Latissimus dorsi	25.0	13.8	20.34	212.9	9.426
Semitendinosus	19.7	19.7	19.70	151.55	7.269
Omohyoideus	17.3	17.3	17.3	4.32	0.236
Supinator longus	21.8	11.4	16.62	57.9	3.292
Levator anguli scapulae	17.5	14.1	15.9	43.32	2.575
Gluteus maximus	18.0	11.0	14.46	813.55	53.162
Pectoralis major. port. sternal.	16.5	11.7	14.74	186.85	12.800
Serratus anticus major	17.6	6.9	13.73	186.00	12.801
Adductor magnus	19.0	8.4	13.55	504.75	35.199
Iliacus internus	13.8	12.3	13.2	226.4	16.182
Bicipitis femoris cap. breve	15.1	11.3	13.2	85.05	6.088
Psoas major	14.6	9.3	13.05	179.25	14.282
Biceps Brachii	14.1	11.7	12.8	124.6	9.155
Splenius colli	12.9	11.5	12.3	11.62	0.847
Sternocleidomastoideus	15.7	9.6	12.2	46.37	3.586
Tensor fasciae	13.9	11.0	11.86	94.9	7.561
Sternohyoideus	12.0	11.3	11.65	5.82	0.472
Pectoralis major. port. clacicul.	13.1	8.9	11.0	53.05	4.557

*) Das Mittel aus allen Messungen.

	Längste Faser in Centim.	Kürzeste Faser in Centim.	Mittlere Länge in Centim.	Gewicht in Gramm.	Querschnitt in Quadrat-centim.
Obliquus abdom. ext.	18.4	2.4	10.9	115.05	9.973
Cucullaris	18.0	6.4	10.87	145.85	12.679
Adductor brev. femoris	12.6	9.6	10.6	88.9	7.925
Adductor long. femoris	11.8	9.4	10.6	119.0	10.608
Pectoralis minor	12.6	8.0	10.37	45.85	4.178
Diaphragma	11.1	8.3	10.38	85.35	7.771
Pectineus	12.2	7.7	10.2	76.55	7.019
Rhomboidei	11.1	8.5	10.3	69.20	6.519
Bicipitis femoris cap. longum	11.7	9.0	9.7	168.05	11.370
Splenius capitis	13.8	5.4	9.6	22.8	2.244
Teres major	12.65	7.45	9.44	98.0	9.810
Extensor longus haluc.	9.4	9.2	9.3	23.85	2.423
Hyothyreoideus	9.3	9.3	9.3	6.47	0.658
Deltoideus	11.7	7.5	9.03	304.65	25.306
Extensor carpi radialis longus	11.6	6.1	8.85	36.6	3.908
Brachialis	11.7	3.3	8.43	117.45	13.165
Pronator teres	11.4	5.1	8.25	36.75	4.209
Biventer et Complexus	11.6	4.9	8.15	37.65	4.365
Sacrolumbaris	9.8	5.8	8.1	91.7	15.339
Semimembranosus	9.0	7.0	8.0	233.4	26.387
Tibialis anticus	8.2	7.3	7.87	112.2	13.471
Tricipitis brachii cap. longum	9.8	6.9	7.74	130.87	15.977
Infraspinatus et Teres minor	9.1	4.5	7.43	131.65	16.472
Extensor digit. pedis longus	8.4	7.1	7.51	36.75	4.624
Rectus femoris	7.8	6.3	7.28	222.6	28.893
Flexor digit. manus sublimis	7.6	3.8	7.26	62.65	10.689
Longissimus dorsi	10.8	4.8	7.2	223.07	31.808
Obliquus abdominis internus	12.4	3.2	7.0	107.12	14.460
Peroneus tertius	7.0	6.8	6.86	7.35	1.012
Plantaris	7.3	6.0	6.77	10.15	1.417

	Längste Faser in Centim.	Kürzeste Faser in Centim.	Mittlere Länge in Centim.	Gewicht in Gramm.	Querschnitt in Quadrat-centim.
Gluteus medius	7.4	6.0	6.76	29.77	41.619
Flexor digit. manus profundus	7.5	5.7	6.74	67.8	10.767
Cruralis et Vasti	12.7	4.4	6.56	1271.0	148.303
Lumbricules manus	7.6	5.8	6.26	3.95	0.596
Extensor carpi radialis brevis	6.4	6.0	6.20	24.3	3.703
Subscapularis	7.5	5.4	6.15	164.3	25.243
Coracobrachialis	6.15	6.0	6.10	37.35	5.786
Extensor digit. manus communis	6.5	5.3	6.05	27.4	4.279
Cervicalis descendens	8.7	3.4	5.93	4.7	0.749
Semispinalis	3.2	9.9	5.2	39.5	0.718
Supraspinatus	6.5	5.5	5.88	48.0	7.713
Obturator internus	7.0	5.0	5.87	53.6	8.628
Flexor longus halucis	6.2	5.7	5.87	83.5	13.441
Tricipitis brachii cap. brevia	7.8	3.7	5.83	160.6	25.985
Trachelo mastoideus	7.2	4.4	5.80	5.55	0.904
Obturator externus	6.4	5.4	5.77	59.2	9.695
Quadratus femoris	6.5	4.9	5.73	43.7	7.206
Pyriformis	5.8	5.5	5.67	32.25	5.374
Transversus	7.3	2.8	5.63	53.0	8.895
Gastrocnemii	6.5	5.0	3.45	330.3	57.266
Gemelli	5.6	5.3	5.43	13.0	2.245
Flexor digit. ped. long.	5.6	5.3	5.43	31.7	5.516
Transversalis cervicis	7.3	2.8	5.43	53.0	8.895
Palmaris longus	5.4	5.3	5.35	4.7	0.830
Extensor pollicis longus	5.4	5.3	5.33	5.15	0.913
Flexor carpi radialis	5.4	5.1	5.3	22.25	4.005
Peroneus brevis	5.0	5.0	5.0	35.3	6.671
Peroneus longus	5.5	4.5	4.94	73.0	13.867
Scalenus anticus	5.7	4.1	4.90	8.59	1.656
Extensor pollicis brevis	5.1	4.7	4.87	5.78	1.122
Gluteus minimus	5.7	3.8	4.81	123.05	24.172
Pyramidalis	5.5	4.1	4.8	3.05	
Indicator	5.2	4.5	4.77	5.9	1.169

	Längste Faser in Centim.	Kürzeste Faser in Centim.	Mittlere Länge in Centim.	Gewicht in Gramm.	Querschnitt in Quadrat-centim.
Flexor pollicis longus	5.3	4.2	4.70	14.25	2.865
Abductor pollicis long.	4.9	4.2	4.67	12.9	2.640
Flexor carpi ulnaris	5.0	4.0	4.6	24.5	5.035
Rectus cap. postic. maj.	4.6	4.5	4.67	2.58	0.533
Geniohyoideus	4.6	4.5	4.55	3.3	0.685
Costalis *)	6.1	2.8	4.46	15.3	0.436
Scalenus medius	6.8	2.07	4.46	12.7	0.436
Serratus post. superior	6.7	2.7	4.44	6.95	1.480
Tibialis posticus	4.8	4.0	4.40	78.7	16.904
Scalenus posticus	5.6	3.5	4.3	5.7	1.360
Extensor carpi ulnaris	4.2	4.1	5.12	23.5	5.355
Abductor pollicis brevis	4.7	3.1	4.11	5.1	1.473
Abductor digiti Vti	4.6	3.5	4.05	7.05	1.645
Temporalis			4.0	33.9	8.008
Quadratus lumborum	7.3	1.3	3.90	45.3	10.471
Obliquus capitis interior	5.7	1.9	3.8	7.35	1.828
Soleus	4.1	3.3	3.73	334.75	84.424
Serratus post. inferior	4.4	2.5	3.58	13.25	3.497
Flexor pollicis brevis	4.2	2.7	3.5	3.65	0.985
Flexor digit. Vti brevis	3.6	3.1	3.35	2.22	0.628
Stylohyoideus	3.4	3.0	3.13	1.1	0.332
Extensor digit. pedis brevis	3.5	3.0	3.08	3.85	1.092
Popliteus	3.1	3.05	3.08	17.35	5.323
Mylohyoideus	4.7	1.1	3.04	4.9	1.523
Spinalis dorsi	4.35	1.25	2.94	5.1	1.639
Multifidus Spinae	0.5	6.9	2.9	210.0	68.437
Masseter	2.9	2.6	2.8	22.1	7.458
Supinator brevis	2.9	2.3	2.77	18.0	6.440
Adductor pollicis	4.1	1.3	2.76	11.3	3.869
Anconeus quartus	3.8	2.4	2.72	9.22	3.205
Caro quadrata	3.0	2.4	2.68	11.0	3.878
Flexor dig. pedis brev.	2.5	2.0	2.35	16.55	6.543
Opponens pollicis	3.5	1.4	2.16	4.5	1.809
Lumbricales pedis	2.5	1.6	2.16	2.25	0.124
Digastricus maxillae	2.0	2.0	2.0	4.85	2.291

*) *pars costalis Sacrolumbaris.*

	Längste Faser in Centim.	Kürzeste Faser in Centim.	Mittlere Länge in Centim.	Gewicht in Gramm.	Querschnitt in Quadrat-centim.
Transversur halucis	2.2	1.8	1.96	1.95	0.940
Pterygoideus internus	2.0	1.9	1.95	8.05	3.904
Pterygoideus externus	1.9	1.9	1.9	9.6	4.774
Pronator quadratus	3.0	0.6	1.9	9.95	4.948
Palmaris brevis	2.0	1.3	1.87	1.8	0.940
Interossei externi man.	3.2	1.1	1.84	15.2	7.806
Flexor halucis brevis	1.9	1.8	1.83	6.85	3.511
Abductor halucis	2.0	1.5	1.80	21.35	11.286
Adductor halucis	2.0	1.5	1.75	15.7	8.477
Interossei interni man.	1.85	1.2	1.63	5.45	3.159
Abductor dig. Vti man.	1.8	1.3	1.54	12.15	8.455
Intercostales externi	3.0	0.8	1.54	125.5	96.942
Intercostales interni	2.6	0.9	1.54	76.6	47.00
Rectus cap. post. minor	1.55	1.5	1.52	0.8	0.497
Rectus cap. anticus maj.	2.9	0.5	1.48	7.6	4.633
Flex. brev. dig. Vti ped.	1.4	1.2	1.30	3.2	2.326
Opponens digiti Vti	1.9	0.9	1.29	2.0	1.465
Interossei interni pedis	1.6	1.1	1.28	4.95	3.654
Interossei externi pedis	1.4	1.1	1.24	17.35	13.221
Interspinales	1.5	0.9	1.2	10.64	8.378
Intertransversales	2.0	0.9	1.17	11.17	9.021
Obliquus cap. superior	1.2	1.15	1.17	2.35	1.898
Levatores costarum	1.7	0.5	1.05	20.35	12.914
Spinotransversales brevissimi *)	1.0	0.5	0.8	8.3	0.980

Die grosse Verschiedenheit der Länge der im Bewegungsmechanismus verwendeten Muskeltheile, welche von 5 Millim. bis 453 Millim. variirt und von welcher die vorstehende Tabelle eine Vorstellung giebt, hängt nicht von der grösseren oder geringeren Entfernung der Befestigungspunkte der Muskeln, sondern allein von der Grösse ab, um die sie sich bei der Bewegung der Glieder verkürzen. Je mehr die Anfangspunkte der Muskeln durch die Gliederbewegungen sich genähert und von einander entfernt werden können, desto länger sind die fleischigen Theile der zwischen ihnen ausgespannten Muskeln; je kleiner

*) Kürzeste Bündel des *Multifidus*.

diese Bewegung ist, desto kürzer sind sie. Die Grösse der verkürzenden Bewegung, welche die Muskelbündel durch die Annäherung ihrer Ansatzpunkte erfahren, hängt aber ab von der Länge des Hebelarmes, an dem sie wie ein Gelenk drehen, von der Grösse des Bogens, um den sie es drehen, und von der Zahl der Gelenke, die sie zugleich dreben: je länger die Hebelarme der Muskeln, je grösser die Drehungsbogen und je zahlreicher die zugleich bewegten Gelenke sind, desto länger sind die Muskelbündel derselben.

Die Muskeln der aus viel beweglicheren Gliedern bestehenden Extremitäten haben im Allgemeinen längere Fleischbündel, die Muskeln des Kopfs und besonders des Rumpfes, dessen Theile weniger beweglich sind, kürzere Fleischbündel. Die ausserordentlich langen Muskeln am Anfange unserer Tabelle gehören daher fast ausschliesslich den Extremitäten an, während die kürzesten am Ende derselben Rumpfmuskeln sind. Genauer ergiebt sich diese Thatsache, wenn man die Tabelle in 2 oder 3 dem Gewichte der enthaltenen Muskeln nach gleiche Abtheilungen theilt und das Verhältniss der Massen beiderlei Muskeln in den verschiedenen Abtheilungen mit einander vergleicht. Theilt man nämlich die Tabelle in zwei gleiche Abtheilungen, so enthält

	die 1. Hälfte	die 2. Hälfte
an Extremitätenmuskeln	4745 Gr.	4461 Gr.
an Kopf- und Rumpfmuskeln	586 »	1170 »

theilt man sie in 3 gleiche Abtheilungen, so enthält

	d. 1. Drittel	d. 2. Drittel	d. 3. Drittel
an Extremitätenmuskeln	3239 Gr.	2980 Gr.	2711 Gr.
an Kopf- u. Rumpfmuskeln	315 »	574 »	843 »

Die erste Hälfte enthält also gerade halb so viel Kopf- und Rumpfmuskeln, als die zweite Hälfte der Tabelle, und wenn man sie in 3 Theile theilt, so wächst der Gehalt an diesen Muskeln vom 1. zum 2. zum 3. Drittel ohngefähr = 1 : 2 : 3, während die Masse der Extremitätenmuskeln natürlich umgekehrt im 1. Drittel am grössten ist und im 2. und 3. Drittel entsprechend abnimmt.

An den einzelnen Extremitäten nimmt die Faserlänge der Muskeln im Mittel von den Enden nach dem Rumpfe zu, weil die Gelenke nach dem Rumpfe hin grösser, ihre Drehungen daher umfangreicher und die Hebelarme der Muskeln immer länger werden. Die Muskeln der Hand- und Fussflächen gehören daher zu den kurzfaserigsten Muskeln der dritten Abtheilung. Die

längsten Muskeln des ganzen Körpers dagegen sind fast nur solche, welche vom Rumpf zu den Extremitäten gehen und die grossen Bewegungen der ganzen Glieder am Rumpfe vermitteln, zumal die unter ihnen, welche gleich mehrere der grossen Gelenke zugleich überspannen, wie der *Sartorius, Gracilis, Semitendinosus, Latissimus dorsi*.

Am Rumpfe nimmt die Faserlänge der Muskeln im Allgemeinen von der Tiefe nach der Oberfläche hin zu: die kürzesten von allen Muskeln des Rumpfes und zugleich des ganzen Körpers sind die, welche zwischen benachbarten Knochen desselben ausgespannt sind und deshalb unmittelbar auf dem Knochengerüst aufliegen, die von jedem Wirbel zum nächsten höheren oder tieferen Wirbel gehenden Bündel des *Multifidus*, die *Intertransversales* und *Interspinales*, weil sie nur die ganz kleinen Bewegungen zweier Wirbel gegen einander zu vermitteln haben, ferner die *Levatores costarum* und *Intercostales*, welche entweder die Rippen gegen die Wirbel um sehr kleine Bogen und an sehr kurzen Hebelarmen zu drehen, oder die kleinen Bewegungen der Rippen gegen einander auszuführen haben. Die Länge der Rumpfmuskeltheile wächst aber nach der Oberfläche hin, weil die oberflächlichen Schichten eine immer grössere Abtheilung des Rumpfes und somit eine grössere Zahl dieser einzeln nur wenig beweglichen Theile überspannen, deren Bewegungen sich aber zu einer grösseren Bewegung summiren. Da manche Muskeln sehr grosse Strecken der Rumpffläche überspannen und sehr entfernte Abtheilungen derselben gegen einander bewegen, so erklärt sich hieraus, warum diese Muskeln, trotz der geringen Beweglichkeit der einzelnen Theile des Rumpfes gegen einander, doch, wie z. B. die *Recti abdominis*, zu den langfaserigsten Muskeln des Körpers gehören können. Besonders deutlich kann man an den Rückgratmuskeln sehen, wie die Länge ihrer Fleischbündel mit der Zahl der von ihnen überspannten Wirbel wächst, weil sie in Reihen zerfallen, welche, wie die der zwischen den *Processus spinosi*, der zwischen den *Proc. transversi* und der von jenen zu diesen ausgespannten Muskeln, übrigens gleichartig sind und nur in der Zahl der Wirbel, die sie überspannen, differiren, so dass man die Abhängigkeit der Länge ihrer Fleischfasern von der letzteren sehr leicht übersehen kann. Wir wollen zu diesem Zwecke die an einer dieser Muskelgruppen, an der des *Semispinalis* und *Multifidus* gemessenen Längen der Fleischfasern beispielsweise hier folgen lassen.

Der *Semispinalis* und *Multifidus* bilden zusammen ein System von 121 von den *Processus spinosi* zu den *Processus transversi* herabsteigenden Muskeltheilen, welche aber immer an anderen Wirbeln entspringen oder endigen, so dass von jedem Wirbel Muskeltheile dieses Systems zu den nächsten 5 und sogar zu den nächsten 10 tieferen Wirbeln laufen, welche also der Reihe nach 0, 1, 2, 3, 4 u. s. w. bis 9 Wirbel überspannen. Wir werden daher, um das Verhältniss der Länge der Fleischbündel zur Zahl der von ihnen überspannten Wirbel übersehen zu können, die Längen der von den verschiedenen *Proc. spinosi* ausgehenden Muskelreihen so unter einander stellen, dass die eine gleiche Zahl der Wirbel überspannenden Theile derselben immer in gleicher Columne unter einander zu stehen kommen. Die an den senkrechten Eingängen der Tabelle stehenden arabischen Ziffern bezeichnen demnach die Zahl der Wirbel, welche von den darunter stehenden gemessenen Muskelbündeln überspannt wurden, die an dem horizontalen Eingange der Tabelle stehenden römischen Ziffern die Nummer des Hals-, Rücken- und Lendenwirbels, von dessen *Processus spinosi* die in gleicher Zeile neben einander stehenden Muskelbündel ihren Ursprung nehmen. Bündel, welche vorhanden waren, aber nicht gemessen wurden, sind an der ihnen zukommenden Stelle durch einen Strich bezeichnet worden.

Tabelle

der Länge der Fleischfasern des Muskelsystems des *Semispinalis* und *Multifidus*, welche in Millimetern gemessen und nach der Zahl der von ihnen überspannten Wirbel geordnet sind.

		Zahl der Wirbel, welche von den Muskelbündeln überspannt wurden, deren Längen in der darunter stehenden Columne verzeichnet sind.									
		0*)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ursprung von der vert. colli	II.	5	9	16	20	24	35	45	57		
	III.	9	17	25	40	.	.	.	80	90	
	IV.	10	16	22	25	54	71	—	84	—	
	V.	9	15	20	37	.	.	66	64	74	
	VI.	9	14	26	36	45	.	66	—	67	
	VII.	—	14	25	36	—	.	65	77	—	

*) Bündel, welche 0 Wirbel überspannen, sind solche, welche von einem Wirbel zum nächsten gehen.

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ursprung vom processus spinos. der vertebra dorsi	I.	8	10	19	28	39	49	61	.	74	91
	II.	8	12	—	—	31	.	53	—	99	
	III.	9	15	—	—	37	40	50			
	IV.	8	14	—	—	32					
	V.	6	13	—	—	38	—				
	VI.	7	12	—	—	26	.	41			
	VII.	6	8	—	—	32	41				
	VIII.	7	12	—	—	22	32				
	IX.	6	11	—	—	36	.				
	X.	7	11	—	—	40	:				
	XI.	—	17	—	—	43	.				
	XII.	11	—	35	—	40	72				
der vert. lumb.	I.	13	20	.	—	69					
	II.	14	24	.	68						
	III.	14	31	76							
	IV.		41								
Mittlere Länge		8	10	29	34	38	49	58	72	81	91

Man übersieht sogleich in dieser Tabelle, dass die Zahlen in den auf einander folgenden Columnen immer grösser werden, und dass sonach die Länge des Bündels wächst im Verhältniss, wie sie 0, 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. Wirbel überspannen. Nimmt man das Mittel aus allen Zahlencolumnen, so erhält man die mittlere Länge der Bündel, welche über

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Wirbel weggehen
= 8, 10, 29, 34, 38, 49, 58, 72, 81, 91 Millimeter.

Die Zunahme der Länge der Bündel, wenn sie einen Wirbe mehr überspannen, beträgt daher durchschnittlich 9 Millimeter.

Ganz ähnliche Längenverhältnisse, wie die Muskelgruppe des *Semispinalis* und *Multifidus,* zeigen auch die zwischen den *Proc. transv.* ausgespannten *M. transversales* und die zwischen den *Proc. spinos.* ausgespannten *Musc. spinales.*

Schliessen die das Rückgrat bewegenden Muskeln zugleich einen andern sehr beweglichen Theil in ihren Wirkungskreis ein, bewegen sie z. B. ausser der Wirbelsäule zugleich noch den Kopf oder die Rippen, so sind auch ihre Fasern weit länger als die anderen ihnen entsprechenden Rückgratmuskeln, bei denen dies nicht der Fall ist; der *Biventer* und *Complexus*, der wie die *Semispinales* und *Multifidus,* über die Halswirbel weggespannt ist, hat weit längere Fasern als die eine gleiche Anzahl Wirbel überspannenden Muskeltheile des *Semispinalis* und *Multifidus*, weil er

zugleich auch das Kopfgelenk, und zwar an einem langen Hebelarme bewegt, ebenso der *Splenius capitis* längere Fasern, als der *Splenius colli*, der *Sacrolumbaris* längere, als der *Longissimus dorsi*, mit dem er sonst ganz übereinkommt, nur dass er sich nicht an den *Proc. transversal.*, sondern an den Rippen endigt und daher zugleich auch diese bewegt.

Man kann aber auch direct durch Messungen nachweisen, dass die Muskelfasern der Verkürzung, die sie durch die Bewegungen der Glieder erfahren, oder der Amplitude der Bewegung ihrer Ansatzpunkte gegen einander proportional lang gemacht sind.

Da die Muskeln am lebenden Körper immer gespannt sind und sich daher auch bei Annäherung ihrer Ansatzpunkte nicht falten, so kann man, vorausgesetzt, dass sie, so weit ihre Fleischbündel reichen, keinen gekrümmten Verlauf haben und nicht durch Bänder und Fasern verhindert sind, sich gerade zu ziehn, auch am todten Körper die Länge ermitteln, welche ein Muskelbündel während des Lebens bei grösster Entfernung seiner Ansatzpunkte und bei grösster Annäherung derselben angenommen hat, wenn man ein Bündel von einem Ende seiner Fleischsubstanz bis zum anderen darstellt und den Abstand beider Enden misst, während man die Glieder auf gleiche Weise und in gleichem Grade nach entgegengesetzten Seiten dreht, als es während des Lebens gestattet ist. Die günstigsten Verhältnisse zu solchen Messungen bieten die Muskeln dar, welche ausschliesslich das Ellenbogengelenk strecken oder beugen, nicht nur weil die Drehungen dieses Gelenks ihrem Umfange nach scharf begrenzt und auf eine Ebene eingeschränkt sind, so dass alle Bündel der Streckmuskeln und alle Bündel der Beugemuskeln genau dieselbe Bewegung der Knochen hervorbringen müssen, sondern auch weil diese Muskeln aus Fleischbündeln von ausserordentlich verschiedener Länge, die in der Verschiedenheit ihrer Hebelverhältnisse ihren Grund hat, zusammengesetzt sind.

Die Muskeln, welche nur das Ellenbogengelenk strecken, sind die kurzen Köpfe des *Triceps*, *caput externum* und *internum* und der sogenannte *Anconeus quartus*. Als völlig gleichartige Muskeltheile können wir sie hinsichtlich der Messungen zusammenfassen und gemeinschaftlich betrachten. Sie bilden zusammen ein Muskelsystem, dessen Muskelbündel von der obersten Randfaser des äusseren Kopfes zur untersten des *Anconeus parvus* gleichmässig an Länge zunehmen. Es genügt deshalb, um das

Verhältniss der Länge der Muskelfasern zur Grösse ihrer Verkürzung zu ermitteln, die oberste Faser des äusseren Kopfes, welche die längste ist, eine untere Randfaser des äusseren und eine des inneren Kopfes, die oberste Faser des *Anconeus parv.* und dessen unterste Faser, welche die kürzeste von allen ist, in der Lage ihrer grössten Verlängerung und ihrer grössten Verkürzung zu messen.

Messung der grössten und kleinsten Länge der Muskelfasern der kurzen Köpfe des Triceps brachii und des Anconeus parvus in Millimetern.

	caput extern.		cap. int.	anconeus quart.	
	oberste Faser	unt. Faser v. ang. ext.	unt. Faser v. ang. int.	oberste Faser	unterste Faser
Ellenbogengelenk gestreckt	105	66	46	37	29
Ellenbogengelenk gebeugt	63	36	23	17	16
Verkürzung	42	30	23	20	13

Aus diesen Messungen ergiebt sich das Verhältniss der Länge der gemessenen Muskelfasern zur Verkürzung, die sie durch die Streckung des Gelenkes erfahren, wie folgt:

Verhältniss der Länge zur Verkürzung.

der obersten Faser	105 : 42	= 1 : 0,4000
» unteren Faser von ang. ext.	66 : 30	= 1 : 0,4545
» » » » ang. int.	46 : 23	= 1 : 0,5000
» oberen Faser des ancon. parv.	37 : 20	= 1 : 0,5405
» unteren Faser d. ancon. parv.	29 : 13	= 1 : 0,4483
	im Mittel	= 1 : 0,4686

Das Verhältniss der Länge der Muskelfasern zur Verkürzung, die sie durch die Bewegung der Glieder erfahren, bleibt daher bei allen Theilen der Streckmuskeln des Ellenbogengelenks sich gleich, ungeachtet die erstere von 105 Millimeter bis 29 Millimeter differirt. Es beträgt nämlich im Mittel von allen Messungen = 1 : 0,469, wovon die einzelnen Beobachtungen nur um einige Hundertel abweichen.

Die Muskeln, welche nur das Ellenbogengelenk beugen, sind der *Brachialis*, der den kurzen Köpfen des *Triceps* gegenüberliegt und sich wie dieser an der *Ulna* endigt, und der *Supinator*

longus, der sich an dem zweiten Unterarmknochen, dem *Radius*, endigt und nicht, wie sein Name besagt, die Supination des Unterarms bewirkt, sondern, wie ich an einem andern Orte nachweisen werde, gleich der *Brachialis* ausschliesslich das Ellenbogengelenk beugt und mit diesem daher völlig gleich steht. Die Länge der Muskelbündel des *Supinator longus* nimmt regelmässig vom oberen zum unteren Rande von 253 bis 123 Millim. ab, die des *Brachialis* von 153 bis 44 Millimeter: beide zusammen bilden demnach eine continuirliche von 253 bis 44 Millimeter abnehmende Reihe von Muskelbündeln, die wir daher, wie bei den Streckmuskeln, in der Betrachtung zusammenfassen wollen. Am *Supinator longus* wurde das oberste längste und unterste kürzeste Bündel, am *Brachialis* das oberste längste Bündel und das unterste kürzeste Bündel am äusseren Rande, sowie auch am inneren Rande gemessen.

Messung der grössten und kleinsten Länge der Muskelfasern des Supinator longus in Millim.

	Länge des obersten Bündels	Länge des untersten Bündels
Ellenbogengelenk gestreckt	253	123
Ellenbogengelenk gebeugt	106	59
Grösse der Verkürzung	147	64

Messung der grössten und kleinsten Länge der Muskelfasern des Brachialis internus in Millim.

	Länge des obersten Bündels	Länge des untersten äussern Randbündels	Länge des untersten innern Randbündels
Ellenbogengelenk gestreckt	133	53	44
Ellenbogengelenk gebeugt	67	22	23
Grösse der Verkürzung	66	21	21

Hieraus ergiebt sich das Verhältniss der Länge der gemessenen Muskelbündel zu ihrer Verkürzung, wenn wir sie nach ihrer Länge geordnet unter einander stellen, wie folgt:

Verhältniss der Länge zur Verkürzung.

Supinator long. oberstes Bündel	253	:	141	=	1	:	0,557
Brachialis oberstes Bündel	133	:	66	=	1	:	0,496
Supinator long. unterstes Bündel	125	:	66	=	1	:	0,528
Brachialis unterstes Bündel I.	53	:	31	=	1	:	0,585
Brachialis unterstes Bündel II.	44	:	21	=	1	:	0,447
Im Mittel aller Messungen				=	1	:	0,528

Auch bei den Beugemuskeln des Ellenbogengelenks ist daher das Verhältniss der Länge der Fleischfasern zur Verkürzung, die sie durch die Bewegung der Glieder erfahren, an allen Theilen derselben sich gleich, ungeachtet die Länge von 250 Millimeter bis 44 Millimeter differirt, nämlich im Mittel von allen Messungen = 1 : 0,528, wovon die einzelnen Beobachtungen nur in den Hunderteln abweichen.

Aber nicht bloss bei den Bündeln ein und desselben Muskels, sondern bei allen Skelettmuskeln, wie verschieden ihre Länge und ihre Verrichtungen sein mögen, stellt sich im Allgemeinen immer dasselbe Verhältniss der Länge zur Verkürzung heraus. Ich habe zu diesem Zwecke die angegebene Methode der Messung auf die meisten Extremitätenmuskeln ausgedehnt, ungeachtet bei vielen derselben die Verhältnisse nicht so einfach und bestimmt sind, wie bei den Muskeln des Ellenbogengelenks, und daher auch nicht immer ein ebenso präcises Resultat der Messungen erwarten liessen.

Immer wurden die Ansatzpunkte des Muskels mit Berücksichtigung aller Gelenke, die er überspannt, in die grösste Entfernung und in die grösste Annäherung gegen einander gebracht, so weit sie irgend am lebenden Körper ausführbar schien, darauf die Endpunkte ein und derselben Fleischfaser des Muskels gegen einander gezogen und ihr Abstand geradlinig gemessen. Ohne hier diese zahlreichen Messungen, für welche die vorausgehenden als Schema dienen mögen, selbst aufzuführen, wollen wir nur die aus ihnen resultirenden Verhältnisse der Länge zur Verkürzung der gemessenen Muskeln zusammenstellen.

Bei den eben betrachteten, sich antagostisch entgegenwirkenden Muskeln des Ellenbogengelenks war nach den mitgetheilten Messungen das Verhältniss der Länge zur Verkürzung fast völlig gleich, nämlich bei den Streckern = 1 : 0,469, bei

den Beugern = 1 : 0,528, sodass es also in beiden Fällen nur um einige Hundertel differirte. Aber auch selbst diese kleine Differenz lässt sich noch daraus erklären, dass die Fascia, welche bei gebogener Lage des Armes zwar die Beuger, aber nicht die Strecker in etwas gebogener Lage erhält, bei den Messungen nothwendig entfernt werden und daher die Verkürzung bei ersteren etwas grösser als bei letzteren ausfallen musste.

Verhältniss der Länge zur Verkürzung bei den Streck- und Beugemuskeln des Handgelenks.

Streckmuskeln des Handgelenks.

		Länge.	Verkürzung.		Verhältniss.
Extensor carpi radialis longus	oberste Fas.	130	: 70	= 1 : 0,538	= 1 : 0,535
	unterste Fas.	60	: 32	= 1 : 0,533	
Extensor carpi rad. brevis		71,5	: 32		= 1 : 0,447
Extensor carpi ulnaris		57	: 27		= 1 : 0,473
				Im Mittel	= 1 : 0,485

Beugemuskeln des Handgelenks.

	Länge.	Verkürzung.		Verhältniss.
Palmaris longus	71	: 36		= 1 : 0,573
Flexor carpi radialis	58	: 35		= 1 : 0,603
Flexor carpi ulnaris	76	: 44		= 1 : 0,579
			Im Mittel	= 1 : 0,581

Das Verhältniss der Länge zur Verkürzung ergiebt sich daher im Mittel der an allen *Musculis carpi* gemachten Messungen = 1 : 0,518, bei den Extensoren etwas grösser, bei den Flexoren etwas kleiner, wie dies und zwar aus demselben Grunde bei den *Musc. cubiti* der Fall war.

Verhältniss der Länge zur Verkürzung bei den Pronatoren und Supinatoren.

		Länge.	Verkürzung.		Verhältniss.
Pronator teres	oberste Faser	68	: 42	= 1 : 0,617	= 1 : 0,509
	untere »	53	: 25	= 1 : 0,472	
	unterste »	41	: 18	= 1 : 0,439	
Pronator quadratus	obere »	37	: 25	= 1 : 0,676	= 1 : 0,657
	untere »	41	: 26	= 1 : 0,639	
Supinator brev.	obere »	41	: 24	= 1 : 0,585	= 1 : 0,568
	untere »	29	: 16	= 1 : 0,552	
				Im Mittel	= 1 : 0,577

Verhältniss der Länge zur Verkürzung bei den kurzen Handmuskeln.

Kurze Muskeln des Daumenballens.

	Länge.	Verkürzung.	Verhältniss.
Opponens pollicis	27	: 14	= 1 : 0,52
Adductor brevis pollicis	45	: 19,5	= 1 : 0,435
Flexor brevis pollicis	38	: 13	= 1 : 0,342
Abductor pollicis	41	: 27,5	= 1 : 0,670

Kurze Muskeln des Kleinfingerballens.

	Länge.	Verkürzung.	Verhältniss.
Opponens digiti quinti	14	: 7	= 1 : 0,5
Abductor digiti quinti	40	: 21	= 1 : 0,525
Flexor brevis digiti quinti	39	: 21	= 1 : 0,538
Interossei externi.			
Interossei ext. I. cap. ext.	31	: 13 = 1 : 412	
			= 1 : 0,454
» » cap. int.	18,5	: 9 = 1 : 486	
Interosseus externus II.	15	: 8	= 1 : 0,533
Interosseus externus III.	13	: 8	= 1 : 0,615
Interosseus externus IV.	20	: 11	= 1 : 0,55
Interossei interni.			
Interosseus internus I.	17	: 10	= 1 : 0,588
Interosseus internus II.	19,5	: 13,5	= 1 : 0,692
Interosseus internus III.	22	: 11,5	= 1 : 0,523
Im Mittel aus allen Messungen			= 1 : 0,534

Das Verhältniss der Länge zur Verkürzung ist demnach im Mittel der ausgeführten Messungen:

bei den Musculis cubiti	= 1 : 0,510
bei den Musculis carpi	= 1 : 0,518
bei den Pronatoren und Supinatoren	= 1 : 0,577
bei den kurzen Handmuskeln	= 1 : 0,534

und zeigt demnach bei allen diesen Muskeln die grösste Uebereinstimmung, die bei derartigen Messungen nur erwartet werden kann.

Bei den langen Fingermuskeln, welche zugleich das Handgelenk bewegen, und eben so auch bei den Muskeln, welche ausser dem Ellenbogengelenke auch das Schultergelenk bewegen,

stellt sich das Verhältniss der Länge der Muskelbündel zu ihrer Verkürzung etwas kleiner heraus.

Verhältniss der Länge der Muskelfasern zur Verkürzung bei den langen Fingermuskeln.

	Länge.	Verkürzung.	Verhältniss.
Flexor digitorum sublimis	91	: 65	= 1 : 0,714
Flexor digitorum profundus	104	: 60	= 1 : 0,577
Flexor pollicis longus	65	: 43	= 1 : 0,661
Extensor digitorum communis	64,5	: 51	= 1 : 0,790
Indicator	66	: 46	= 1 : 0,697
Extensor pollicis longus	57	: 37	= 1 : 0,649
Extensor pollicis brevis	49	: 36,5	= 1 : 0,737
Abductor pollicis longus	45	: 27	= 1 : 0,628
Im Mittel aller Messungen			= 1 : 0,682

Verhältniss der Länge zur Verkürzung der Muskeln, welche Schulter- und Ellenbogengelenk zugleich überspannen.

	Länge.	Verkürzung.	Verhältniss.
Biceps brachii	146	: 86	= 1 : 0,589
Anconeus longus	132	: 92	= 1 : 0,697
Im Mittel beider Messungen			= 1 : 0,643

Das Verhältniss der Länge der Muskelfasern zur Verkürzung, die sie durch die Bewegung der Glieder erfahren, ist demnach

bei den langen Fingermuskeln = 1 : 0,682
bei den langen, das Schulter- und Ellenbogengelenk zugleich überspannenden Muskeln = 1 : 0,643

also etwas kleiner, als wir es bis jetzt bei den übrigen Armmuskeln gefunden haben.

Bei den **Beinmuskeln** stellt sich das Verhältniss der Länge der Muskelfasern zur Verkürzung, die sie bei der Bewegung der Glieder erfahren, ganz ähnlich wie bei den **Armmuskeln** heraus. Sie sind, wie sie sich aus den Messungen ergeben haben, in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Verhältniss der Länge der Muskelfasern zur Verkürzung bei sämmtlichen Beinmuskeln.

	Länge.	Verkürzung.	Verhältniss.
Gluteus maximus, längste Faser	301 :	158 =	1 : 0,52
» » kürzeste Faser	127 :	66 =	1 : 0,52
Gluteus medius, längste Faser	100 :	67 =	1 : 0,67
Gluteus minimus, kürzeste Faser	47 :	26 =	1 : 0,55
Pyriformis	65 :	54 =	1 : 0,46
Gemellus superior	56 :	31 =	1 : 0,55
Quadratus	83 :	64 =	1 : 0,77
Psoas	120 :	57 =	1 : 0,47
Iliacus	95 :	41 =	1 : 0,43
Tensor Fasciae	137 :	72 =	1 : 0,52
Pectineus, obere Faser	111 :	64 =	1 : 0,57
» untere Faser	134 :	74 =	1 : 0,55
Adductor long., äusserste Faser	110 :	45 =	1 : 0,41
» » innerste Faser	157 :	54 =	1 : 0,34
Adductor brevis, äusserste Faser	105,5 :	44,5 =	1 : 0,42
» » innerste Faser	175 :	77 =	1 : 0,44
Adductor magnus, oberste Faser	251 :	131 =	1 : 0,52
Adductor magnus, unterste Faser	185 :	114 =	1 : 0,62
Cruralis	137 :	61 =	1 : 0,44
Vastus externus	150 :	63 =	1 : 0,42
Vastus internus	149 :	63 =	1 : 0,46
Bicipitis caput breve	111 :	51 =	1 : 0,46
Popliteus	43,5 :	19,5 =	1 : 0,45
beim Soleus	53 :	30 =	1 : 0,56
Tibialis anticus	75 :	38 =	1 : 0,51
Peroneus tertius	70 :	37 =	1 : 0,53
Tibialis posticus	32 :	15 =	1 : 0,47
Peroneus longus	47 :	21 =	1 : 0,47
Peroneus brevis	41 :	17 =	1 : 0,41
Caro quadrata	23 :	14 =	1 : 0,61
Flexor brevis digitorum	22 :	13 =	1 : 0,59
Abductor hallucis	18,5 :	7,5 =	1 : 0,41

	Länge.	Verkürzung.	Verhältniss.
Adductor hallucis, äusserer Rand	19,0 :	9	= 1 : 0,47
» » Mitte	20 :	13	= 1 : 0,65
Abductor digiti quinti, vordere Faser	19 :	8	= 1 : 0,42
Abductor digiti quinti, hintere Faser	18 :	9	= 1 : 0,5
Interosseus externus II.	19 :	8,5	= 1 : 0,45
Interosseus externus IV.	10 :	5,6	= 1 : 0,50
Extensor brev. digitorum	40 :	19,5	= 1 : 0,49
Extensor brev. hallucis	42 :	20	= 1 : 0,48
Extensor longus hallucis	88 :	46	= 1 : 0,52
Extensor longus digitorum	84 :	43	= 1 : 0,51
Flexor longus hallucis	67 :	35	= 1 : 0,52
Flexor longus digitorum	42 :	25	= 1 : 0,59
Extensor longus hallucis	88 :	46	= 1 : 0,52
Extensor longus digitorum	84 :	43	= 1 : 0,51
Flexor longus hallucis	67 :	35	= 1 : 0,52
Flexor longus digitorum	43 :	25	= 1 : 0,58
Sartorius	435 :	213	= 1 : 0,49
Gracilis	289 :	152	= 1 : 0,53
Gastrocnemii cap. externum	75,7 :	47,7	= 1 : 0,60
» cap. internum	71,7 :	43,5	= 1 : 0,60
Semimembranosus	104 :	93	= 1 : 0,89
Semitendinosus	197 :	155	= 1 : 0,78
Bicipitis caput longum	148 :	108	= 1 : 0,73
Rectus femoris	113 :	68	= 1 : 0,60

Im Mittel aus diesen Messungen ergiebt sich das Verhältniss der Länge der Muskelfasern zur Verkürzung

bei den nur ein Gelenk überspannenden Muskeln

bei den ausschliesslich das Hüftgelenk bewegenden Muskeln = 1 : 0,46

bei den ausschliesslich das Kniegelenk bewegenden Muskeln = 1 : 0,47

bei den ausschliesslich das Fussgelenk bewegenden Muskeln = 1 : 0,49

bei den kurzen Fussmuskeln = 1 : 0,51

bei den 2 Gelenke überspannenden Muskeln

bei den langen Fusszehenmuskeln	= 1 : 0,51
bei dem Sartorius und Gracilis	= 1 : 0,5
bei dem Gastrocnemius und Rectus femoris	= 1 : 0,6
bei dem Semitendinosus, Semimembranosus und dem langen Kopfe des Biceps	= 1 : 0,8

Das Verhältniss der Länge der Muskelfasern zu der ihnen gestatteten Verkürzung stellt sich demnach bei den Beinmuskeln ganz entsprechend wie bei den Armmuskeln heraus; etwas grösser und sehr gleichförmig bei den ein Gelenk überspannenden Muskeln, etwas kleiner durchschnittlich bei den Muskeln, welche zwei Gelenke überspannen. Die unverhältnissmässig grosse Verkürzung, welche sich bei einzelnen der 2 Gelenke überspannenden Muskeln, namentlich bei'm Semitendinosus, Semimembranosus und dem langen Kopfe des Biceps aus den Messungen ergiebt, erklärt sich ebenso wie ihre grosse Differenz von anderen Muskeln dieser Classe aus der grossen Unsicherheit, mit welcher diese Messungen bei den 2 Gelenke überspannenden Muskeln ausgeführt werden.

Fassen wir Arm- und Beinmuskeln zusammen, so ergiebt sich das Verhältniss der Länge der Muskelfasern zu der Grösse, um welche sie sich im Körper verkürzen können, im Mittel sämmtlicher von uns ausgeführter Messungen = 1 : 0,56. Dieses Resultat kann aber darum noch etwas zu gross sein, weil wegen der Entfernung der Fascien die Verkürzungen der Beugemuskeln im Vergleich zu der der Streckmuskeln im Allgemeinen zu gross ausgefallen sind. Man kommt daher hinsichtlich der Bestimmung der Grösse des Verhältnisses vielleicht der Wahrheit näher, wenn man, statt das Mittel aus allen Messungen zu nehmen, sich an die zuverlässigsten hält.

Hiernach können wir das bei den Streckmuskeln des Ellenbogengelenks (siehe Seite 75) gefundene Verhältniss der Länge der Muskelfasern zur Verkürzung, die sie bei den Bewegungen erfahren, = 1 : 0,47, welches auch bei anderen vorzügliches Vertrauen verdienenden Messungen häufig wiederkehrt, als massgebend für die grosse Masse der sämmtlichen ein Gelenk überspannenden Muskeln betrachten.

Eine etwas beträchtlichere Verkürzung dagegen scheint bei den über zwei Gelenke weggebenden Muskeln vorzukommen.

Halten wir uns hinsichtlich dieser Muskeln, deren Messungen wegen der Complication ihrer Functionen sehr unsicher sind und daher auch sehr stark von einander differiren, an diejenigen Messungen, welche unter sich und zugleich mit dem Mittel aus allen Messungen der dieser Classe angehörenden Muskeln übereinstimmen, nämlich an die

des Biceps brachii	1 : = 0,579
des langen Kopfs des Triceps	1 : = 0,697
der langen Fingermuskeln	1 : = 0,678
des Rectus femoris	1 : = 0,600
des Gastrocnemius	1 : = 0,600

so ergiebt sich für die 2 Gelenke überspannenden Muskeln im Allgemeinen das Verhältniss der Länge der Muskelfasern zur Verkürzung, die sie bei der Bewegung erfahren, = 1 : 0,62, welches wir zugleich als die Grenze betrachten dürfen, unter welche dieses Verhältniss überhaupt nicht bei den Muskeln heruntergeht.

Die Kaumuskeln dagegen dürften diejenigen Muskeln sein, welche bei der Bewegung der Glieder die kleinste Verkürzung erfahren, weil es in ihrem Zwecke liegt, dass sie bei Berührung der Kauflächen noch die grösste Kraft ausüben. Sie scheinen daher besonders geeignet, um die andere Grenze, die der geringsten Verkürzung, durch Messung zu bestimmen, zumal da sich auch der Umfang der Kieferbewegung während des Lebens genauer als der der meisten anderen Bewegungen bestimmen lässt. Die grösste Annäherung des Kiefers ist nämlich durch das Zusammenstossen der Kauflächen der Zähne scharf begrenzt, die grösstmögliche Entfernung des Kiefers während des Lebens dagegen lässt sich dadurch bestimmen, dass man die Entfernung der Zahnränder misst, während der Kiefer durch die Muskeln möglichst weit herabgezogen ist. Diese Entfernung betrug bei verschiedenen lebenden Mannspersonen gemessen übereinstimmend 43 Millimeter. Es wurde nun an einem diesen Personen entsprechenden Leichname der Abstand der beiden Enden einzelner Bündel der verschiedenen Kaumuskeln von einander gemessen, sowohl während sich die Kauflächen der Zähne berührten, als auch nachdem der Kiefer so weit herabgezogen war, dass die Zahnränder um 42 Millim. von einander entfernt waren. Hieraus ergab sich das Verhältniss der Länge zur Verkürzung der drei Hebemuskeln des Kiefers:

	Länge in Millim.	Verkürzung.		Verhältniss.
des Masseter	wie 43,0	: 20	=	1 : 0,465
des Temporalis	wie 50,5	: 21,5	=	1 : 0,426
des Pterygoideus internus	wie 30,5	: 13	=	1 : 0,426
		Im Mittel	=	1 : 0,439

Die Kaumuskeln, bei denen wir die geringste Verkürzung vorausgesetzt haben, ergeben demnach das Verhältniss der Länge der Muskelfasern zu der ihnen gestatteten Verkürzung = 1 : 0,40, welches daher als die Grenze betrachtet werden kann, über welche dieses Verhältniss überhaupt bei den Muskeln nicht hinausgeht. Da dasselbe von dem als normal betrachteten Verhältnisse (= 1 : 0,47) nur um wenige Hundertel differirt, so scheinen nach dieser Seite keine oder nur sehr geringe Abweichungen vorzukommen.

Aus der vorausgehenden Untersuchung ergiebt sich demnach, dass die Fleischfasern der Muskeln allenthalben im Körper der Verkürzung, die sie bei der Bewegung erfahren, proportional lang gemacht sind, und dass dieses Verhältniss der Länge der Muskelfasern zu der ihr gestatteten Verkürzung, da es nicht grösser als 1 : 0,44, nicht kleiner als 1 : 0,6 vorkommt, jedenfalls im Mittel sehr nahe wie 1 : 0,5 oder 2 : 1 angenommen werden kann. Die Muskeln verkürzen sich demnach beim Gebrauche im Körper ohngefähr nur bis zur Hälfte ihrer grössten Länge. Da sich nun aber die Muskeln nach genauen Messungen bei Fröschen*) um 85 Procent ihrer Länge zu verkürzen vermögen und wir nicht Ursache haben, bei warmblütigen Thieren ein geringeres Contractionsvermögen anzunehmen, so folgt hieraus, dass nicht das ganze Contractionsvermögen der Skelettmuskeln, sondern nur ein Theil desselben im Körper wirklich zur Anwendung komme, und folglich die Muskeln sich ihrem Vermögen nach, wenn sie keinen Wi-

*) Wagner's Wörterbuch, Bd. III, S. 83.

derstand fänden, noch um 35 Procent ihrer Länge weiter verkürzen könnten.

Dieses Resultat ist auch sehr erklärlich, da es beim Gebrauche der Muskeln nicht bloss auf die Grösse der Verkürzung, sondern ebenso auch auf die Grösse der Kraft, mit der sie geschieht, ankommt, welche beim Beginn der Contraction am grössten ist und bis zu deren Ende bis auf 0 abnimmt. Der letztere Theil des Contractionsvermögens, welche keine genügende Kraft gewähren würde, ist daher im Bewegungsmechanismus ganz unbenutzt gelassen.

D'Arrest, *Bericht über die Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss zu Königsberg in Preussen am* 28. *Juli* 1851.*)

Meine Reise zur Beobachtung des seltenen Phänomens der totalen Bedeckung der Sonne war mit Bewilligung und Unterstützung des vorgeordneten Königl. Ministerium direct nach Königsberg gerichtet, weil ich lebhaft den Wunsch hegte, bei Gelegenheit dieser Beobachtung die vorzüglichen Instrumente und die ausgezeichneten Einrichtungen der dortigen Universitäts-Sternwarte kennen zu lernen. Es sollte nach den Vorausberechnungen die Dauer der totalen Verfinsterung an diesem Orte nur wenige Secunden kürzer sein, als an irgend einem an-

*) Die Resultate der Beobachtung und die Folgerungen, zu denen sie Veranlassung giebt, wurden bereits am 16. August in der Sitzung der Gesellschaft, wie sie in diesem Aufsatze gegeben sind, vorgetragen und sind in Kürze durch die Astronomischen Nachrichten veröffentlicht worden. Dagegen fällt die Abfassung des gegenwärtigen ausführlichen Berichtes in spätere Zeit, nachdem ein Theil der Resultate und einige Abbildungen der Erscheinung durch andere Astronomen dem Verfasser bereits bekannt geworden.

dern Punkte des nördlichen Preussens, und hätte ungünstige Witterung den Hauptzweck der Reise vereitelt, so konnte ein längerer Aufenthalt auf der Bessel'schen Sternwarte fast vollständige Entschädigung für diesen Verlust bieten.

Bereits am 18. Juli reiste ich von Leipzig ab, mit einem der hiesigen Sternwarte gehörigen Dollond'schen Fernrohr und einem Chronometer von Gutkäs, um mich den von der Berliner Sternwarte ausgerüsteten Beobachtern anzuschliessen, den Herren Observator Dr. Galle und Dr. Brünnow, Director der Sternwarte zu Bilk bei Düsseldorf. Gemeinschaftlich mit diesen und den Herren Director Littrow aus Wien und Dr. Wolfers aus Berlin erreichte ich am nächsten Tage Stettin, mit dessen Sternwarte und magnetischem Observatorium auf der Navigationsschule uns Herr Director Domke bekannt machte. Unserer Reise schlossen sich hier noch an die Herren Observator Schmidt und Thormann von der Sternwarte zu Bonn. Mit dem am 20. Juli in See gehenden Dampfschiff Königsberg langte ich in der Nacht vom 21. zum 22. in Königsberg an, nachdem die Herren aus Berlin, Bilk und Wien bereits in Pillau ans Land gestiegen, um von dort aus nach den von ihnen im Voraus gewählten Beobachtungsstationen abzugehen. Da überdies Herr Director Dr. Busch mit seinen Instrumenten an den Strand gereist war, während Prof. Peters einen Ort an der russischen Grenze und die Beobachter aus Bonn die Stadt Rastenburg zum Ziel ihrer Reise ausgewählt hatten, so befanden sich zur Beobachtung der Finsterniss die Gehülfen der Sternwarte, Observator Dr. Wichmann und Marth, allein mit mir auf dem Königsberger Observatorium.

Nach einigen Tagen sehr unbeständigen Wetters, welches das Gelingen unserer Beobachtung sogar überaus zweifelhaft erscheinen liess, und nachdem noch am Vormittage des 28. Juli grosse Haufenwolken aus Nordwest vorübergezogen, löste sich um Mittag die Bedeckung des Himmels mehr und mehr auf, die wenigen zurückbleibenden Dunststreifen fielen in keiner Weise hinderlich, und die Witterung war für Königsberg der Beobachtung durchaus günstig.

Das erwähnte Fernrohr von Dollond hat eine Focallänge von vier Fuss bei 33 englischen Linien Oeffnung. Die schwächste, 81fache Vergrösserung, welche ich ausschliesslich anwandte, gab mit den von Herrn Mechanicus Einenkel zum Zwecke dieser Beobachtung in verschiedenen Abstufungen angefertigten Blend-

gläsern ein sehr präcises, nahezu weisses Sonnenbild. Ein noch vollkommeneres Sonnenglas von Plössl in Wien, dessen ich mich ebenfalls bedienen konnte, und ein Fraunhofer'scher Kometensucher, den die Güte des Herrn Dr. Wichmann mir zur Disposition stellte, liessen meinen Apparat so vollständig erscheinen, dass ich es keineswegs bereuen durfte, nicht eines der grösseren Fraunhofer'schen Fernröhre der Leipziger Sternwarte den Gefahren des weiten Transportes ausgesetzt zu haben. Allerdings gestattete die beträchtliche Vergrösserung meines Instrumentes nicht den ganzen Umfang der Sonne zugleich zu übersehen, ein Umstand, auf welchen einige Beobachter noch gegenwärtig Gewicht zu legen scheinen. Vielleicht liegt aber gerade in den zu schwachen Vergrösserungen, welche vielfach und in der Absicht angewandt worden sind, den ganzen Sonnenkörper im Felde zu haben, der erste Grund zu den beträchtlichen Verschiedenheiten in der Auffassung, die sich bereits herausgestellt haben in Betreff derjenigen Erscheinung, welche die Aufmerksamkeit fast aller Beobachter hauptsächlich auf sich gezogen hat. Den Gesammtanblick des Phänomens totaler Bedeckung der Sonne gewährt ohnehin ein guter Kometensucher besser als jedes andere Fernrohr.

Abgesehen vom astronomischen Interesse wünschte ich den allgemeinen Eindruck kennen zu lernen, welchen die eine totale Verfinsterung begleitenden Erscheinungen nach den Berichten der Alten und nach den lebhaften Schilderungen neuerer Astronomen hervorrufen sollen; ich wählte deshalb zum Standpunkte meiner Instrumente den Balcon über dem Südzimmer der Sternwarte, welcher eine weite Aussicht nach Westen bietet und einen Theil der Stadt im Südosten übersehen lässt.

Die erste äussere Berührung der Mond- und Sonnenränder erfolgte etwa 56 Secunden später, als die genaue Berechnung der Königsberger Astronomen ergeben hatte, ein Unterschied, der in einem ungewöhnlich starken Längenfehler der Burckhardt'schen Mondtafeln zur Zeit der Conjunction seine Erklärung findet.*) Ermüdet durch diese Verzögerung und über den vorausbestimmten Punkt des ersten Eingriffs zweifelhaft geworden,

*) Nach Dr. Wichmann's am grossen Heliometer angestellten Messungen betrug der Tafelfehler in Rectascension fast eine halbe Bogenminute.

habe ich möglicher Weise den Anfang 1 oder 2 Secunden zu spät bemerkt. Die Vergleichung des Chronometers mit der Kessels'-schen Meridianuhr ergab

Anfang der Finsterniss ... $3^h\ 38'\ 11''$ M. Zt. zu Königsberg. Dr. Wichmann beobachtete die Berührung 5 Secunden später, Hr. Marth 5 Secunden früher; der Erstere hält diesen Moment für unsicher, verschiedene Ursachen störten den Letzteren bei den Beobachtungen.

Das Fortschreiten der Verdunkelung bot nichts Erwähnenswerthes dar; der heftige Wind aus Nordwest, der mich zuerst störte und die Fernröhre erschütterte, legte sich während der Stunde, die bis zum Eintritt der Totalität verfloss, fast gänzlich, und ich durfte ungestört und in vollkommener Ruhe den Verlauf der Erscheinung erwarten. Vielleicht darf ich dieser günstigen Umstände wegen hier einige negative Bemerkungen machen, Erscheinungen gegenüber, die von Einigen der auf der preussischen Linie aufgestellten Beobachter beschrieben worden sind, welche durch schwach vergrössernde Instrumente unterstützt und von weniger günstigen Umständen, wie es scheint, umgeben waren. Weder sah ich von der dunkeln Oberfläche des Mondes irgend eine Spur, obgleich ich nach leuchtenden Punkten oder einer Erleuchtung des Randes ausserhalb der Sonne suchte, noch konnte ich irgend eine Färbung bemerken am vorangehenden dunkeln, auf der Sonnenscheibe vorrückenden Mondrande. Mit angestrengter Aufmerksamkeit konnte ich während der letzten Momente und bis zum gänzlichen Verschwinden der erleuchteten Sonnensichel Nichts von den beweglichen schwarzen Perlen entdecken, welche man nach Baily benannt hat; schwarze Striche, nach den Einen parallel mit den Rändern, nach Andern senkrecht die Sichel durchschneidend, bemerkte ich ebensowenig. Die Berliner Astronomen in Frauenburg und Dr. Wichmann mit dem Fernrohr des Heliometers bemerkten von diesen Erscheinungen gleichfalls keine Andeutung.

Zu dem Zwecke, die gefärbten «fliegenden Schatten» zu bemerken, welche mit grosser Hast wenige Secunden vor dem Eintreffen des Kernschattens und ebenso kurze Zeit nach dem Weggange desselben vorüberziehen sollen, hatte ich vor mir zwei grosse, mit weisser Oelfarbe überzogene Tischplatten aufgestellt. Sie verloren schon vor Eintritt der Finsterniss ihre blendende Weisse und erschienen zuletzt in mattem Grau, so matt, dass ich nichts von vorübereilenden Schatten auf diesen

Flächen bemerkte; höchstens wurde die Beleuchtung derselben zuletzt etwas unsicher und flimmernd, vielleicht im Grunde analog dem Flimmern des Fixsternlichtes. Den nahenden Kernschatten begleitete auf meinem nach Nordwest freien Standpunkte, d. h. der Richtung entgegengesetzt, welche der Schatten auf der Erdoberfläche verfolgte, kein «heranstürmender Finsternisswind»: es war in den letzten Momenten sogar fast windstill geworden.

Wenn ich endlich das Entstehen eines Bogenstückes der Corona an dem der schmalen Sonnensichel entgegengesetzten Mondrande ganz kurze Zeit vor dem Verschwinden der letzten Sonnenstrahlen nicht bemerkte, so habe ich auf diese Erscheinung, welche durch übereinstimmendes Zeugniss anderer Beobachter sicher festgestellt erscheint, damals nicht besonders geachtet. Etwa zwei Minuten früher sah ich indessen mit hellgrünem Blendglase im Kometensucher keine Spur eines Stückes der Corona. — Es zeigte sich in meinem Fernrohre bis zum letzten Momente überhaupt keine Erscheinung als das einfache Uebereinanderschieben einer schwarzen und einer weissen Kreisscheibe. Die Unebenheiten des Mondrandes waren am Orte der innern Berührung der Ränder sehr unbedeutend, und das Zusammenlaufen der Spitzen der Sonnensichel erfolgte so schnell, dass ich eine wirkliche Trennung der Sichel durch dunkle Hervorragungen des Mondes nicht wahrnehmen konnte.

Diesen zweiten Moment beobachtete ich sicher:

Anfang der totalen Verfinsterung.... $4^h 38' 58''$ M. Zt. zu Königsb.

Dr. Wichmann, der im Innern des Thurmes beobachtete, hatte die Secunde übereinstimmend notirt.

Sogleich zeigte sich dem unbewaffneten Auge der weisse, vielleicht hellgelbliche Schein kranzförmig um den dunkeln Körper des Mondes, wie man ihn in allen Zeiten bei totalen Finsternissen gesehen hat. Ich wandte einige Secunden zunächst auf die allgemeine Umsicht. Im Freien war die Dunkelheit keineswegs tief, kaum so gross, als man sie nach den Beschreibungen anderer totaler Verfinsterungen erwarten durfte, denn das gesammte Licht des Himmels liess die Umgegend, freilich wie in Nebel gehüllt, erkennen, und Herr Dr. Wollheim da Fonseca aus Berlin, welcher sich mit mir auf dem Balcon befand, das Phänomen im Allgemeinen zu betrachten, konnte in den Minuten der totalen Bedeckung Bleistiftnotizen machen. Schwerlich würde ich indessen ohne künstliche Beleuchtung die einzelnen Secun-

den auf dem Zifferblatte meines Chronometers erkannt haben, und es verdient vielleicht bemerkt zu werden, dass ein Versuch die Gegend zu daguerreotypiren, den man in der Nähe der Sternwarte während der drei Minuten der Totalität anstellte, auch dies Mal gänzlich missglückte.

Es liegt in der Natur der Sache, dass die Beleuchtung des Himmels durchaus verschieden war von jedem Grade der Sonnentiefe unter dem Horizonte. Das Firmament war tiefdunkelblau, entfernte Wolken am südöstlichen Horizonte erschienen verschieden gefärbt, — doch es war weder Zeit, diese Farbennuancen festzusetzen, noch nach dem Erscheinen der helleren Sterne umherzusehen. Die Abkühlung der Atmosphäre war unterdessen gering, aber dennoch fühlbar; verschiedene Beobachter haben das Sinken der Temperatur zu Königsberg im Schatten übereinstimmend zu zwei bis drei Grad R. bestimmt. Besondere Erwähnung verdient bei dieser Gelegenheit die Bemerkung, dass ich nach dem Wiedererscheinen der Sonne sorgfältig, aber durchaus vergebens nach Thaubildung auf verschiedenen Oberflächen gesucht habe, während man diese Erscheinung doch in der Regel, zugleich mit dem Finsternisswinde, als unzertrennlichen Begleiter totaler Sonnenfinsternisse bezeichnet.

Nachdem ich einen Theil der ersten Minute auf die Erscheinung im Ganzen gewandt hatte, kehrte ich eilig zu den Fernröhren zurück. In beiden Instrumenten konnte ich, natürlich nach Entfernung der farbigen Gläser, auf der Oberfläche des Mondes durchaus weder Erleuchtung noch Färbung irgend einer Art bemerken, der Körper erschien im Gegentheil durchaus schwarz. Ich habe versucht, in der beigegebenen Zeichnung den Anblick wiederzugeben, welchen die Corona im Kometensucher darbot; es leuchtet indessen von selbst ein, dass eine später aus dem Gedächtniss entworfene Darstellung Aehnlichkeit mit dem Phänomen nur ganz im Allgemeinen beanspruchen kann. Es kann diese Zeichnung also weder die Anordnung der Strahlen, noch ihre Häufigkeit getreu nach dem vortrefflichen Bilde im Kometensucher wiedergeben, noch endlich das Verhältniss der kürzeren und der längeren Strahlen, oder der breiteren und der schmaleren genau versinnlichen. Aber in der sehr kurzen Zeit überzeugte ich mich davon mit Sicherheit, einmal zu Anfang, dann gegen das Ende der Erscheinung, dass der leuchtende Ring, welcher ohne Unterbrechung bis auf eine Breite von nahe fünf Minuten den Mond umgab, in sehr deutlich getrennte ge-

radlinige Strahlen auslief, äusserst verschieden in Längenausdehnung und Breite. Bewegung irgend einer Art habe ich an diesen Strahlen, von denen die längsten den Mondhalbmesser wenig übertrafen, nicht wahrgenommen; sie waren sehr irregulär vertheilt, sämmtlich auf den Mittelpunkt des Mondes oder der Sonne gerichtet. Eine mit dem Monde oder der Sonne concentrische Theilung der Corona, wie sie einige Beobachter 1842 in Oberitalien gesehen, war durchaus nicht wahrnehmbar. Dagegen war die Lichtstärke sehr ungleich, und zwar so, dass im Anfange die östliche, gegen das Ende die westliche Seite unzweifelhaft die hellere und, wie ich glaube, auch die breitere erschien, ganz wie diese Erscheinung sich darbieten müsste, wenn sie von einer den Sonnenkörper bis zu sehr beträchtlicher Höhe umgebenden Atmosphäre herrührte, von welcher der Mond allmälig die unteren, helleren Schichten auf der einen Seite enthüllt, auf der andern bedeckt. Am Rande hin war das Licht äusserst unruhig, in den letzten Momenten der Totalität im Westen, wo die Sonne wieder erschien, wie blitzend und auflodernd; doch war es sicher nicht übergreifend über den scharfbegrenzten Mondrand. Der blosse flüchtige Anblick eines derartigen Phänomens kann nicht berechtigen, über die Natur desselben eine Vermuthung aussprechen zu wollen, und zwar um so weniger, als die verschiedene Helligkeit im Ost und West, je nach der Lage der verdunkelten Sonne, sich vermuthlich in ähnlicher Weise zeigen würde, wenn die Erscheinung rein optisch durch Beugung des Sonnenlichtes entstände. Wenn die sehr energische Strahlung in der That, im Augenblicke der Beobachtung selbst, dem Gedanken an eine rein optische Erklärung die Oberhand geben konnte, so möchte doch der vom leuchtenden Ringe scharf sich abhebende Mondrand mehr für die Meinung Derjenigen zeugen, welche in der Corona einen adhärirenden Theil der Sonne, eine den Körper umgebende Photosphäre zu erblicken glauben.

Schon während dieser Musterung des leuchtenden Gürtels hatte ich im Kometensucher das Vorhandensein rother Hervorragungen am Ost- und Westrande bemerkt, die ich nun sogleich mit der starken Vergrösserung des Dollond'schen Fernrohrs betrachtete, und die während des grössten Theils der Totalitätsdauer meine Aufmerksamkeit fesselten. Denn in der That, ihr diesmaliges Erscheinen musste auch für Den überraschend sein, der sich mit den isolirt stehenden Nachrichten vom 2. Mai 1733

(a. St.) und vom 7. August 1850, so wie mit den zahlreichen Berichterstattungen und Abbildungen des Phänomens vom 7. Juli 1842 vertraut gemacht hatte.

Flüchtig habe ich die Oerter von den fünf Protuberanzen auf einem Kreisumfange während der Finsterniss bemerkt, welche auf der beigegebenen Zeichnung dargestellt sind; mit Ausnahme des linken oberen (am Westrande) machen sie sämmtlich keinen Anspruch auf Genauigkeit, weder in Position, noch Farbe und Gestalt. Die am rechten untern Rande befindliche Hervorragung betrachtete ich zuerst einige Secunden; als ich später einen ebenso flüchtigen Blick dahin wandte, fand ich dieselbe zuverlässig kleiner, ohne im Gedächtniss einen Eindruck von ihrem Aussehen bewahrt zu haben. Die linke hornartig gekrümmte Erscheinung nahm Zeit und Aufmerksamkeit in Anspruch, ich glaube, dass ihr Ort auf der Zeichnung, in welcher der senkrechte Durchmesser ein Vertical ist, sehr nahe richtig angegeben wurde. Sie bestand aus zwei bestimmt gesonderten Theilen, zwischen denen in meinem Fernrohr keine Art von Verbindung zu entdecken war, einem scheinbar mit dem Monde ununterbrochen in Zusammenhang bleibenden, rechts nach aufwärts gebogenen, ursprünglich fast cylinderförmigen Körper, und einer isolirten Wolke von ähnlichem Ansehn, die im Durchmesser wenig mehr als eine Viertelminute hielt. Diese wunderbare Hervorragung, welche in einer der Abbildung des Phänomens am oberen Rande beigefügten Zeichnung besonders so dargestellt ist, wie mein Fernrohr sie zeigte, liess deutlich zwei Einschnürungen und an der hakenförmigen Umbiegung eine merkliche Anschwellung erkennen. *) Es bedurfte nur kurzer Zeit, um ihr continuirliches Hervorwachsen hinter dem nach rechts abrückenden Monde zu bemerken: jeder spätere Augenblick bestätigte diese Beobachtung, welche sich vorzüglich schön zeigte, als ich wenige Augenblicke vor dem Hervortreten der Sonnenstrahlen die untere Basis des Horns fast in doppelter Breite austreten sah. In diesem Augenblicke mochte das Ganze eine Höhe von zwei Bogenminuten haben. Eine fernere Bestätigung dieser neuen und wichtigen Beobachtung des Verdeckens und Blosslegens der rothen Rand-

*) Ein Umriss dieser Gestalt, wie ich ihn während der Beobachtung gezeichnet hatte, wurde bereits in einem Holzschnitte durch die Astronomischen Nachrichten bekannt; in der gegenwärtigen Abbildung, in welcher ich die sehr flüchtige Skizze nach dem Gedächtniss wenig abgeändert habe, glaube ich der wahren Gestalt näher gekommen zu sein.

erscheinungen durch den Mond (wodurch sie zuerst als dem Sonnenkörper zugehörig sich erwiesen haben) boten drei weitere, erst während der Betrachtung der grössern Protuberanz successive hervorbrechende und mit gleicher Geschwindigkeit wachsende Spitzen derselben Art. Sie standen respective zwanzig und dreissig Grade weiter nördlich, und sind gleichfalls, freilich mit einiger Willkür, in der Zeichnung angegeben.

Die Zahl der im Zeitraume von drei Minuten aufzufassenden Thatsachen war, wie man sieht, so gross, und diese selbst wenigstens theilweise so überraschend und in ihrer schnellen Aufeinanderfolge die ruhige Betrachtung störend, dass ich über die Färbung der Randerhebungen zuverlässige Einzelheiten anzugeben nicht im Stande bin. Den Eindruck behielt ich, dass die Phänomene im Allgemeinen intensiv rosenroth erschienen; doch waren sie nicht gleichförmig gefärbt. Ich kann das grosse westliche Horn, in dessen Ansehen ich übrigens eine Veränderung bestimmt nicht wahrgenommen habe, zum Theil als hellrosa, zum Theil als blauröthlich bezeichnen. Die später auftretenden nördlicheren Protuberanzen muss ich für dunkler roth gefärbt halten; eine beträchtliche Anzahl funkelnder Spitzen und Flämmchen, welche zwei bis drei Secunden vor Wiederaustritt der Sonne in der Nähe des Austrittspunktes selbst hervorbrachen, und welche flimmernd und gleichsam beweglich diesem Theile des Randes ein gezähntes Ansehen gaben, erglänzten in rubinrother Farbe. Während dieser letzten Secunden der totalen Finsterniss wurde zugleich das Licht der Corona äusserst intensiv, es wallte unruhig und blendete das Auge. Ich beobachtete die Rückkehr des Sonnenlichtes im Fernrohre, ohne Blendglas und, wie ich denke, zuverlässig. Die Vergleichung der Uhr hat später ergeben:

Ende der totalen Finsterniss . . . $4^h\,41'\,53''$ M. Zt. zu Königsb.
Dr. Wichmann erhielt den Moment 5 Secunden später, Hr. Marth 1 Secunde früher, Beide nach ihrer Meinung unsicher, jener durch das wiederkehrende Sonnenlicht unvorbereitet überrascht. Meine Zeitangabe kann nur in dem Falle zweifelhaft sein, wenn ich durch das scintillirende Licht des leuchtenden Kranzes getäuscht ein besonders starkes, blendendes Aufwallen am Rande für das Hervortreten der Sonne genommen habe. *) Man kann mit grosser Sicherheit die Secunde 54 als für

*) Aehnlich bei der totalen Sonnenfinsterniss im Jahre 1842: „Gegen

das Ende der Totalen geltend ansehen. — Ueber dieser Beobachtung des Zeitmomentes habe ich leider eine wichtige und entscheidende Beobachtung anderer Art versäumt, welche die Herren von Littrow und Mauvais berichten. Diesen Astronomen ist es gelungen, noch eine kurze Zeit nach dem Aufhören der Totalität die Protuberanzen in matten Umrissen am Sonnenrande haftend zu beobachten. In der That sind die Randstrahlen der Sonne, so lange die Sichel äusserst klein, verhältnissmässig leicht ohne Blendglas zu ertragen, und so beträchtlich war die Intensität der Randerhebungen, dass das Gelingen einer solchen Beobachtung wahrscheinlich wird, auch ohne eine Erklärung durch Nachbilder im Auge nothwendig zu machen. *)

Der weitere Verlauf bis zum Schlusse der Verfinsterung bot nichts Erwähnenswerthes dar. Die letzte Berührung beobachtete ich so:

Ende der Finsterniss . . . $5^h\ 38'\ 32''$ M. Zt. zu Königsberg. Die Uebereinstimmung der drei Beobachter ist dies Mal befriedigend: Dr. Wichmann giebt die Secunde 33, Hr. Marth 32.

Dies waren die Erscheinungen, welche sich der Beobachtung unmittelbar darboten. Es wird aus ihnen ziemlich wahrscheinlich, dass der leuchtende Ring, welcher den Mond umgab, dem Sonnenkörper selbst zugehört. Es kann ferner, in Folge des gleichförmigen Wachsens der rothen Hervorragungen an der Westseite und der sicher constatirten Abnahme derselben auf

---

das Ende der totalen Finsterniss zeichnete sich wieder derjenige Punkt, wo der Austritt der Sonne zu erwarten war, durch die breiteste Lichteinfassung aus, indem diese der Sonne mehrere Secunden lang und in so bestimmten Umrissen vorausging, dass man einen Augenblick sich versucht fand, dieselbe für die Sonne selbst zu nehmen." Littrow, Annalen der k. k. Sternwarte in Wien, XXII. S. XXXIII. — Herr Kutczycki machte kürzlich fast dieselbe Bemerkung in den Compt. Rend. bei Gelegenheit seines Berichtes über die totale Finsterniss in Honolulu.

*) Bekanntlich haben Biela und Conti bereits 1842 das Sichtbarbleiben der rothen Erhebungen nach Aufhören der Totalität bemerkt. — Unter den sehr zahlreichen Beschreibungen der damaligen Erscheinungen finde ich nur eine einzige, mit allen übrigen scheinbar in Widerspruch stehende, welche vortrefflich mit der gekrümmten Protuberanz von 1851 übereinstimmt. Es ist die von Werdmüller von Elgg in Pitten bei Wiener-Neustadt: „Der grösste dieser Strahlenbüschel war in seiner halben Höhe rechtwinklig abgebogen, wie die Flamme einer Weingeistlampe, wenn der obere Theil mittelst des Löthrohres zur Bildung einer Flatterflamme seitwärts gebogen wird."

der entgegengesetzten Seite des Mondes, nach dem Verhältniss seiner Fortbewegung, keinem Zweifel unterliegen, dass diese von Vassenius zuerst entdeckten und seitdem drei Mal bereits wiedergesehenen gefärbten Randerscheinungen wirkliche Hervorragungen auf der Sonnenoberfläche sind.

Nachdem diese Thatsache einmal feststeht, erkennt man sogar leicht, dass einige von den früheren Beobachtern, wenn auch nicht mit derselben Sicherheit und ohne dieser Bemerkung, wie es scheint, ihren Werth beizulegen, Aehnliches gesehen haben. Vassenius bemerkt freilich ausdrücklich: *nubem invariatam situmque pristinum in atmosphaera prope ad peripheriam lunae occupantem . . . perspexi*,*) indessen betrug damals die Dauer der Totalität wenig über zwei Minuten, und Vassenius verlor einen Theil dieser Zeit mit dem vergeblichen Bemühen, das Phänomen seinem Gehülfen zu zeigen. Auch muss die Beobachtung mit seinem Fernrohr überaus beschwerlich gewesen sein. Wenn dagegen im Jahre 1842 mehrere der geschicktesten Beobachter, wie Schumacher und Airy, keine Veränderungen an den Randerscheinungen bemerkt zu haben ausdrücklich angeben,**) so gilt dies ausschliesslich von den am Nord- und Südrande, also nicht in der Bahn des Mondes befindlichen, welche Schumacher und Airy wahrgenommen und beschrieben haben. In dieser Lage musste die Grössenänderung allerdings wenig bemerklich sein. Biela dagegen hat an der nordwestlichen Seite die rothen Lichtpyramiden während der Finsterniss hervortretend und an der Basis sich verbreiternd beobachtet, ganz wie es die Fortbewegung des Mondes erfordert.

Die Thatsachen, welche uns gegenwärtig überzeugt haben, dass die farbigen Vorsprünge bei totalen Finsternissen dem Sonnenkörper selbst zugehören, führen uns darauf, einen Zusammenhang zwischen diesen und den Fleckengruppen auf der Oberfläche desselben zu vermuthen. Diese Vermuthung hatte sich den Astronomen schon vor der diesmaligen Finsterniss dargeboten, da für Jeden, der die Thätigkeit auf der Sonnenoberfläche mit guten Instrumenten zu beobachten Gelegenheit hat, und dem die besondere Sichtbarkeit der Fackeln gegen den Rand der Scheibe hin aufgefallen, der Gedanke nahe liegt, dass solche gewaltige Trennungen und Zerreissungen der oberen Hülle ein

*) Philos. Trans. XXXVIII. S. 135. Vgl. auch Astr. Nachr. XX. S. 106.
**) Schumacher, Jahrbuch für 1843. S. 234.

Hervortreten matter leuchtender Stoffe über den Sonnenrand hinaus veranlassen müssen. Diese Vermuthung, welche Boguslawsky im zweiten Hefte seiner Ephemeriden für 1851 zuerst ausgesprochen (S. 61), war unterdess so lebhaft geworden, dass am Morgen des 28. Juli die rothen Hervorragungen besonders an den beiden Randpunkten erwartet wurden, welche nachher in der That die beträchtlichsten derselben gezeigt haben. Am Morgen dieses Tages durchmusterte ich mit dem Dollond'schen Fernrohre die Sonnenoberfläche. Soviel sich ohne Messapparat darüber urtheilen lässt (die Unsicherheit kann nur sehr wenige Grade betragen), entsprachen der Stelle am Westrande, an welcher später das grosse rosafarbene Horn erschien, eine ansehnliche, von Fackeln umgebene Fleckengruppe, und ein schmaler, langgestreckter Randfleck derjenigen Stelle am Südostrande, an welcher sich die isolirte, in der Zeichnung angedeutete Protuberanz zeigte.

Zu dieser scheinbaren Bestätigung einer vorgefassten Meinung kommen noch die Gestalt und das Ansehen der Erhebung am Westrande und der freischwebenden Wolke, die ich allein genauer betrachten konnte, und welche ich nur mit einer gasförmigen Ausströmung zu vergleichen wüsste. Vielleicht könnte man sich also vorstellen, dass die untere, weniger leuchtende Sonnenatmosphäre, welche, nach einer sehr verbreiteten Auffassung der Erscheinungen an den Flecken, Höfen und Fackeln, die obere hellleuchtende Hülle durchbricht, bis zu ansehnlicher Höhe heraufgetrieben wird.

Aber es stellen sich dieser auf den überaus kurzen Anblick eines uns ganz fremden Phänomens gegründeten Erklärungsweise Einwürfe entgegen. Ein Mal nämlich hat man gegenwärtig auch beträchtliche rothe Hervorragungen an Stellen des Randes bemerkt, welche weder durch Flecken, noch eine besondere Anhäufung des leuchtenden Stoffes ausgezeichnet waren. In den letzten Secunden hatte ich sogar einen grossen Theil des Randes, der dem Austrittspunkte der Sonne entsprach, mit rothen Zähnen besetzt gesehen, und diese, flimmernd und glänzend, möchte ich nicht mit dem Bilde eines aus vielen Poren ausströmenden Gases bezeichnen.

Noch mehr Bedenken gegen die angedeutete Erklärungsweise, welche sich dies Mal, wie es scheint, der Mehrzahl der Beobachter aufgedrängt hat, ruft die totale Finsterniss von 1842 hervor. Die damaligen Beobachter haben nämlich keine Flecken oder beson-

ders irregulär beleuchtete Stellen an den entsprechenden Stellen des Sonnenrandes bemerkt, weder vor noch nach der Finsterniss, und es scheint besonders bedenklich, dass sie übereinstimmend die beträchtlichsten und glanzvollsten Erscheinungen am Nord- und Südrande der Sonne sahen, wo man, wie bekannt, zu keiner Zeit Zerreissungen der Lichtatmosphäre, Flecken oder beträchtliche Fackelbildung beobachtet hat.

Die Natur der constatirten Ausströmungen auf der Sonnenoberfläche bleibt somit unerklärt, und wahrscheinlich wird man diese Vorgänge erst dann kennen lernen, wenn es einmal gelingt, nach den Vorschlägen der Herren Arago und Littrow, dieselben beliebig sichtbar zu machen, ohne von der seltenen Gelegenheit totaler Finsternisse abhängig zu sein.

Andrerseits sind aber jetzt Thatsachen genug von Augenzeugen übereinstimmend gesammelt, um die Unzulässigkeit gewisser neuerdings versuchter rein optischer Erklärungen zu beweisen. Man wird nicht behaupten dürfen, durch Experimente die Erscheinungen nachgebildet zu haben, welche durch totale Verfinsterungen der Sonne hervorgerufen werden, so lange unter den nun bekannt gewordenen Phänomenen die Nachbildung gerade der wichtigen und entscheidenden nicht gelingt, so lange das Wachsen und das Abnehmen der Protuberanzen, die rechtwinklig abgebogene Gestalt und endlich die isolirte Wolke in der Unvollkommenheit des Apparates allein ihre Erklärung finden sollen.

SITZUNG AM 6. DECEMBER 1851.

Hankel, *Messungen der Abstossungen des krystallisirten Wismuths durch die Pole eines Magnets mittelst der Drehwage.*

Faraday hat eine zweifache Einwirkung des Magnetismus auf das krystallisirte Wismuth nachgewiesen. Wenn ein Wismuthkrystall vor dem Pole eines Magnets beweglich aufgehangen ist, so erleidet er die allgemeine, von Faraday mit dem Namen des Diamagnetismus bezeichnete Abstossung, welche seine ganze Masse als solche trifft. Aber ausserdem zeigt sich, wenn der Krystall eine bestimmte Aufhängung vor dem Pole hat, noch eine eigenthümliche Einwirkung, indem der Magnetpol stets eine bestimmte Linie des Krystalles auf sich hin zu richten strebt, nämlich diejenige, welche auf der Ebene des deutlichsten Blätterdurchgangs des krystallisirten Wismuths senkrecht steht. Faraday hat diese Linie mit dem Namen der Magnekrystallaxe bezeichnet. Faraday selbst glaubte Anfangs, dass diese Magnekrystallkraft, welche den Krystall zwischen den Polen eines Magnets richtet, nur eine drehende Bewegung desselben um seine Axe erzeugen könnte, keineswegs aber eine wirkliche Anziehung des Wismuths nach dieser Richtung, oder was damit in der Erscheinung zusammenfällt, eine geringere diamagnetische Abstossung des Wismuthkrystalles nach dieser Richtung, als nach der auf dieser Axe senkrechten, zu veranlassen im Stande wäre. Seine Versuche schienen auch Anfangs, indem er bei einem Wismuthkrystalle, welcher in verschiedenen Richtungen einem Magnetpole gegenübergestellt war, stets dieselbe Abstossung zu finden glaubte, diese Meinung zu bestätigen. Später indess, durch Betrachtungen über die Natur dieser Magnekrystallkraft geleitet, gelangte er zu der gerade entgegengesetzten Ansicht, nämlich dass diese Magnekrystallkraft doch die diamagnetische Abstossung abändern müsse, und fand dann auch durch genauere Ver-

suche diese Ansicht bestätigt; er erhielt, wenn die sogeeannte Magnekrystallaxe in der Richtung der magnetischen Kraftlinien lag, eine geringere diamagnetische Abstossung, als wenn diese Axe senkrecht auf der Richtung dieser Linien stand.

Faraday führt aber keine bestimmten Messungen über diese Unterschiede an, sondern begnügt sich mit der blossen Erwähnung eines solchen Unterschiedes. Auch sind bis jetzt, so viel mir bekannt, ausgedehntere Messungen darüber nicht angestellt worden. Eine genauere Kenntniss dieser Einwirkung des Magnetismus auf das krystallinische Wismuth ist aber sowohl mit Rücksicht auf den Magnetismus als auch den Diamagnetismus von Wichtigkeit; ich habe daher Versuche behufs einer genaueren Bestimmung der verschiedenen Abstossungen des krystallisirten Wismuths nach den verschiedenen Richtungen unternommen, und erlaube mir dieselben in dem Folgenden mitzutheilen.

Zu vorläufigen Messungen benutzte ich ein Parallelepipedum aus krystallisirtem Wismuth von quadratischem Querschnitt, 23,8 ^{mm} lang und 10 ^{mm} breit und hoch, ersetzte es aber bald durch einen Cylinder von 18^{mm} Länge und 8,4^{mm} Durchmesser aus derselben Masse. Beide Stücke krystallisirten Wismuths waren nach dem Zerschlagen aus einer grössern Masse gereinigten Wismuths ausgesucht, und das erstere durch Abschaben mit Glas, das zweite aber durch Abdrehen mit der Spitze eines Drehstahles in seine Form gebracht. Durch die Berührung mit der stark gehärteten Spitze eines Drehstahles ist wohl keine Verunreinigung des Wismuths durch Eisentheilchen zu fürchten, zumal die Spitze nach dem Abdrehen noch ganz ihr ursprüngliches Ansehen besass. Jede sonstige Verunreinigung durch magnetische Körper wurde sorgfältig vermieden. Die Hauptdurchgangsfläche, welche die krystallinische Masse zeigte, bildete in dem Parallelepipedum ohne weitere Bearbeitung zwei der gegenüberliegenden Seitenflächen; in dem Cylinder war diese Hauptdurchgangsfläche der Axe parallel.

Beide Körper wurden bei den Versuchen in einer Gabel befestigt, welche an der einen Seite des Balkens einer Drehwage angebracht war. Das grössere Parallelepipedum ging nur mit seinen kürzeren Dimensionen zwischen die Spitzen dieser Gabel, und wurde daher auch nur in zwei Lagen untersucht, wobei seine Längsrichtung stets auf der Richtung der Axe des Magnets senkrecht stand, aber zuerst der Hauptblätterdurchgang vertical und dann zweitens horizontal gelegen war. Der Wismuthcylinder

konnte dagegen in aufrechter Stellung in der Gabel befestigt werden. Mit ihm verbunden fand sich noch eine kleine Kreisscheibe von 26^{mm} Durchmesser, welche von 30 zu 30° eingetheilt und mit dem Cylinder um des letzteren Axe zwischen Spitzen drehbar war. Durch einen an dem Arme des Balkens befindlichen Zeiger, unter welchem sich die getheilte Kreisscheibe drehte, ergab sich die jedesmalige Stellung des Cylinders, wenn derselbe zugleich mit der mit ihm verbundenen Kreisscheibe um seine Axe gedreht wurde.

Der Arm des Balkens der Drehwage, an welchem die Gabel war, mass von seinem Aufhängepunkte bis zu den Spitzen, zwischen welchen die Wismuthstücke eingeklemmt wurden, 108^{mm}; der andere Arm war 120^{mm} lang und trug an seinem Ende einen Planspiegel, dessen Ebene senkrecht auf dem Balken stand. In der Mitte trug der Balken ein T förmiges Stück, womit er in einem Bügel aufgehangen wurde, welcher an einem 2720^{mm} langen und ungefähr 0,05^{mm} dicken Kupferdrahte befestigt war. Das obere Ende des Aufhängedrahtes war an der Decke des Zimmers (in der Wölbung eines Bogens) in der Mitte eines um seinen Mittelpunkt drehbaren Kreises befestigt, wodurch der Balken der Drehwage in jede Richtung gebracht werden konnte. Der Balken der Drehwage war von einem schmalen, hölzernen Kasten, der an Länge den Balken um etwas übertraf und an den beiden langen Seiten Glasplatten enthielt, umgeben. In der Wand des Kastens, welche dem Spiegel gegenüber stand, war ein Planglas eingesetzt, und der Stand des Balkens wurde auf einer 2 Meter entfernten, in halbe Millimeter eingetheilten Scala durch ein Fernrohr abgelesen.

Zur Abstossung des Wismuths wandte ich nicht einen Elektromagnet, sondern einen Stahlmagnet an. Aus den in dem physikalischen Cabinet vorhandenen Stahlmagneten (jeder von 1220^{mm} Länge, 78^{mm} Breite und 15^{mm} Dicke) wurden die beiden kräftigsten ausgewählt, ihre gleichnamigen Pole durch Schrauben fest mit einander verbunden und die Südpole der beiden so vereinigten Magnete dem Wismuthstück ungefähr in einer Entfernung von 42^{mm} gegenübergestellt, so dass die magnetische Axe der Stäbe nahe senkrecht auf der Richtung des Balkens der Torsionswage stand. Die Lage der beiden Stäbe, welche vereinigt vorn eine Fläche von 78^{mm} Breite und 30^{mm} Höhe bildeten, wurde übrigens nach Möglichkeit noch so gewählt, dass die Mitte dieser Fläche der Mitte des Wismuthstückes gerade gegen-

über stand. Durch weitere Vorrichtungen war dafür gesorgt, dass die beiden Magnete, wenn sie entfernt worden waren, möglichst genau wieder in ihre frühere Lage zurückgebracht werden konnten. Die Magnetstäbe blieben übrigens stets ausserhalb des Glaskastens.

Die Schwingungsdauer (die Zeit eines Hin- und Hergangs) betrug bei Anwendung des Parallelepipedums aus Wismuth und des nöthigen Gegengewichtes ungefähr 5 Minuten, bei Anwendung des kleinern Wismuthcylinders und des nöthigen Gegengewichtes nur nahe gegen 4 Minuten.

Die Beobachtungen wurden so angestellt, dass zuerst bei Entfernung der Magnete von der Seite der Drehwage der Stand des Balkens aus mehreren auf einander folgenden Ablesungen der zu beiden Seiten stattfindenden grössten Elongationen, dann auf gleiche Weise der Stand desselben nach der Annäherung der Magnete und zuletzt wieder der Stand desselben nach der Entfernung derselben hergeleitet wurde. Wenn der Stand des Balkens in der Zeit zwischen der ersten und dritten Bestimmung, bei welchen die Magnete entfernt waren, sich nur sehr wenig geändert hatte, was sich aus dem nahe übereinstimmenden Werthe beider ergab, so konnte wohl die Annahme gemacht werden, dass das Mittel aus beiden dem Stande entspräche, welcher zur Zeit der zweiten Beobachtung ebenfalls bei Entfernung des Magnets stattgefunden haben würde; und dieses Mittel wurde daher mit der zweiten Messung bei Annäherung der Magnete zusammengestellt, um die durch die Magnete bewirkte Ablenkung der Drehwage zu erfahren, Wenn die erste und dritte Bestimmung, des Standes des Balkens bei Entfernung der Magnete etwas stärker verschiedene Werthe gaben, so wurde die ganze Messung nochmals wiederholt.

Die meisten Messungen sind in den trüben und ruhigen Tagen zwischen Weihnachten 1850 und Neujahr 1851 angestellt worden, ein Theil indess auch schon früher, im August und September 1850. Die grössere Versuchsreihe mit dem Wismuthcylinder fällt in die Zeit zwischen Weihnachten und Neujahr. Die Temperatur des grossen Saales, in welchem die Messungen gemacht wurden, änderte sich in dieser Zeit sehr wenig; sie schwankte nur zwischen 3° und 4° C., eine Temperatur, die bei der langen Dauer der Schwingung gerade nicht zu den Annehmlichkeiten zu rechnen war.

Die Versuche mit dem Parallelepipedum aus Wismuth

konnten sich nur auf zwei Lagen desselben, wie sie auch oben schon angegeben wurden, beziehen. Ich habe sie überhaupt auch mehr als vorläufige, nur zur Prüfung des ganzen Apparates dienende betrachtet. Ihre genauere Mittheilung hier geschieht aber vorzugsweise in der Absicht, die Ueberzeugung zu befestigen, dass das Abdrehen des Cylinders mit der Spitze des gehärteten Stahles keine Verunreinigung des erstern mit Theilchen des letztern veranlasst hat.

Der Balken der Drehwage selbst erlitt von Seiten der genäherten Magnete eine Anziehung. Um diese zu bestimmen, wurde das Parallelepipedum aus Wismuth und sein Gegengewicht an einem Coconfaden unterhalb der Mitte an dem Balken befestigt und die Magnete abwechselnd entfernt und genähert. Es ergab sich in Folge dieser magnetischen Anziehung eine Ablenkung des Balkens um 385 Scalentheile (Millimeter), welche bedeutende Anziehung besonders durch eine kreisförmige Messingscheibe von 54^{mm} Durchmesser, die anstatt der oben beschriebenen von 26^{mm} Durchmesser sich bei diesen Versuchen oberhalb des Wismuths befand und mit ihrem Rande dem Magnet sehr nahe kam, veranlasst wurde. Corrigirt wegen der Excentricität des Spiegels beträgt die Ablenkung 408 Scalentheile. Darauf wurde das Parallelepipedum aus Wismuth in die Gabel an das Ende des Balkens gebracht, und zwar mit seinen Blätterdurchgängen vertical (so dass also die Axe der Magnete senkrecht auf ihrer Ebene stand), und durch passende Anordnung der Gegengewichte ins Gleichgewicht gebracht, damit die Scale wieder in dem Fernrohr erschien. Das Gewicht, welches der Draht zu tragen hatte, wurde hierbei nicht verändert, da Wismuth und Gegengewichte auch vorher schon angehangen waren. Der Balken erlitt bei dieser Anordnung von Seiten der dem Wismuth bis auf ungefähr 42^{mm} genäherten Magnete nicht nur keine Anziehung mehr, sondern sogar noch eine Abstossung um 9,5 Skalentheile, sodass also die diamagnetische Abstossung des Wismuths noch die magnetische Anziehung des Balkens übertraf. Genau genommen lassen sich die vorstehenden Werthe der Anziehungen und Abstossungen nicht ohne Weiteres vergleichen, weil beide nicht in derselben Entfernung gemessen wurden, indem bei der Anziehung um 408 Scalentheile der Messingbalken den Magnetpolen um ungefähr 15 Millimeter näher war als nachher bei der Abstossung. Nehmen wir an, die Anziehung des Balkens hätte in der Länge, wo er durch die Abstossung des

Wismuths stehen blieb, ebenfalls 408^{mm} betragen, so wäre die Abstossung des Wismuths durch die Magnetpole = 408 + 9,5 = 417, 5^{mm}. In jedem Falle aber ist diese Zahl zu gross, da die bei der letzten Stellung des Balkens stattfindende Anziehung wegen der grössern Entfernung vom Magnete nicht 408 Scalentheile betragen kann.

Darauf wurde das Parallelepipedum aus Wismuth um seine Längsaxe gedreht, also so zwischen die Gabel gebracht, dass die Ebene seines Hauptblätterdurchgangs in der Richtung der Axe der Magnetstäbe lag; die Längenausdehnung desselben lag in beiden Fällen parallel mit dem Balken der Drehwage. Als jetzt wieder die Magnete bis auf die vorhin bezeichnete Entfernung genähert wurden, so ergab sich eine, die magnetische Anziehung noch um 157, 9 Scalentheile übersteigende Abstossung. Corrigirt wegen der Excentricität des Spiegels beträgt dieselbe 167, 4. Nehmen wir wieder an, dass in dieser Lage des Balkens die magnetische Anziehung desselben ebenfalls 408 Scalentheile betragen hätte, so ist der Betrag der Abstossung gleich 408 + 167,4 = 475,4 Scalentheilen, ein Werth, der ebenfalls wieder zu hoch ist, aber vielleicht trotz der etwas weitern Entfernung des Wismuths vom Magnet nicht in stärkerm Grade als der vorige. Denn es zeigte sich, dass in Folge der Form des angewandten Magnetpoles und der Entfernung des Wismuths eine geringe Aenderung in der Entfernung der Magnete keinen bedeutenden Einfluss auf den Stand des Wagebalkens hatte; so änderte bei einem Versuche, wo die Durchgänge des Wismuths wie zuletzt horizontal lagen, eine Vergrösserung der Entfernung der Magnete um etwa 8 Millimeter den Stand des Balkens um etwa 2 Scalentheile, und eine Vergrösserung der Entfernung um 24 Millimeter verringerte die Abstossung ungefähr um 12 Scalentheile. Wir dürfen also die Einwirkung der Magnete in der Stellung des Balkens bei einer Abstossung um 9 Scalentheile und um 158, welche letztere Stellung ungefähr um 6 Millimeter vom Magnet entfernter ist, als wenigstens nahe vergleichbar erachten. Ein Gleiches gilt aber durchaus nicht von der Anziehung der Magnete auf den Balken der Wage ohne Wismuth, wobei ausserdem das Ende des Balkens den Magneten um ungefähr 15^{mm} näher kam, und namentlich ein Theil des Randes der Messingscheibe bei dieser Anziehung der obern Kante der Magnetpole sehr genähert wurde.

Die vorhin angeführten Messungen machen, wie schon angeführt, keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit, da sie nur aus

einmaligen Versuchen hergeleitet sind und auch aller sonstigen Controle entbehren. Berechnen wir indess das Verhältniss der Abstossung des Parallelepipedums von Wismuth in den beiden Lagen mit seinem Blätterdurchgange senkrecht auf der Richtung der magnetischen Kraftlinien und parallel damit, so erhalten wir 417,5 : 575,4 = 0,72 : 1. Dieses Verhältniss ist aber jedenfalls etwas zu gross, indem die mit dem Werthe von 408 in Rechnung genommene Anziehung des Balkens zu gross ist. Setzen wir also die Abstossung in der Lage, wo die Blätterdurchgänge mit der Axe der Magnete parallel liegen, = 1, so muss die Abstossung in der andern Lage, wo die Blätterdurchgänge senkrecht auf der verlängerten Magnetaxe stehen, etwas kleiner sein als 0,72.

Diese vorläufigen Versuche bewiesen deutlich die Verschiedenheit in der Abstossung des krystallisirten Wismuths nach seinen verschiedenen Richtungen und forderten dadurch zur Durchführung einer genauern und ausgedehntern Versuchsreihe mit dem zuvor beschriebenen Cylinder aus krystallisirtem Wismuth auf.

Um die Anziehung von Seiten der Magnetpole auf die Theile der Drehwage möglichst zu verringern, wurde die grosse messingene Kreisscheibe durch eine kleinere von halb so grossem Durchmesser (von 26^{mm} Durchmesser) ersetzt; die magnetische Anziehung wurde auf diese Weise erstens durch die geringe Masse des Messings und zweitens durch die vergrösserte Entfernung, um welche die Theile am Rande der Scheibe von den Magnetpolen entfernt waren, verringert. Zuvörderst musste aber die Anziehung des Balkens und dieser Kreisscheibe von den Magnetpolen bestimmt werden, und zwar nach verschiedenen Richtungen, indem die Scheibe bei der Messung der Abstossungen des Wismuths zugleich mit gedreht werden sollte. Es soll die Stellung der Kreisscheibe stets durch den Winkel angegeben werden, welchen auf ihren Theilpunkten der in der Verlängerung des Wagebalkens liegende Zeiger, unter welchem sich die Kreiseintheilung bewegt, anzeigt.

Die Versuche wurden so gemacht, dass erst die Stellung des Balkens der Drehwage bei Entfernung der Magnetpole, dann bei bis auf ungefähr 42 Millimeter genäherten Magnetpolen und dann wieder nach Entfernung derselben bestimmt wurde. Der Wismuthcylinder sammt seinem Gegengewichte befand sich an einem Coconfaden hängend unterhalb der Mitte des Wagebalkens, um den Aufhängedraht bei allen Versuchen durch dasselbe Gewicht zu spannen.

Die unter der Ueberschrift Elongationen befindlichen Zahlen bezeichnen die auf einander folgenden Ausschläge, aus denen auf die gewöhnliche Weise der Ruhestand hergeleitet ist. Wenn die Bewegungen der Nadel nur wenig Scalentheile betrugen, so habe ich mich bisweilen mit nur 3 Ablesungen begnügt, um die Dauer der Versuche etwas abzukürzen.

Nur die Kreisscheibe befand sich an dem Ende des Balkens der Drehwage; der Wismuthcylinder und sein Gegengewicht hingen unter der Mitte des Balkens.

	0° Elongationen.	0° Ruhestand.
Magnet entfernt	299,5 315,7 298,9 314,5 299,5	 307,4 307,0 306,9
Magnet genähert	284,0 113,5 274,0 120,3 265,5	 196,2 195,6 195,2
Magnet entfernt	379,8 231,0 374,5 237,6 369,4	 304,5 304,3 304,7
	90° Elongationen.	**90° Ruhestand.**
Magnet entfernt	255,0 332,0 258,8 330,0	 294,2 294,9
Magnet genähert	119,5 249,9 123,8 242,5	 185,0 184,9
Magnet entfernt	387,3 197,0 381,1 205,1 374,4	 290,5 291,0 291,4

	180° Elongationen.	180° Ruhestand.
	254,9	
	336,5	296,6
Magnet entfernt	258,5	296,7
	333,4	296,7
	264,8	296,9
	330,6	
	259,7	
	128,4	192,0
Magnet genähert	252,7	191,5
	133,2	191,2
	245,8	
	382,0	
	214,1	296,3
Magnet entfernt	375,2	296,5
	221,8	296,8
	368,4	

	270° Elongationen.	270° Ruhestand.
	10,1	
	580,5	300,5
Magnet entfernt	31,2	300,4
	559,0	300,1
	51,3	300,1
	538,5	
	326,1	
	61,1	190,0
Magnet genähert	312,9	189,6
	72,6	189,6
	301,6	
	355,7	
	239,9	296,7
Magnet entfernt	351,5	296,9
	245,0	297,2
	347,5	

Aus den unter der Ueberschrift Ruhestand verzeichneten partiellen Mitteln wurde das allgemeine Mittel für den Stand des Balkens vor der Annäherung der Magnetpole, dann während derselben und zuletzt nach der Entfernung hergeleitet. Das Mittel aus den beiden allgemeinen Mitteln vor der Annäherung und nach der Entfernung der Magnete wurde dann mit dem Stande während der Annäherung derselben verglichen und daraus die

Anziehung des Balkens und der Kreisscheibe hergeleitet. Sie ergab sich

			corrigirt
bei der Stellung	0°	zu 110,1 Scalentheilen	116,6 Scalentheil.
» » »	90°	zu 107,7 »	114,2 »
» » »	180°	zu 105,0 »	111,5 »
» » »	270°	zu 108,8 »	115,3 »

Die letzte Reihe enthält die wegen der Excentricität des Spiegels corrigirten Werthe.

Die Messingscheibe scheint hiernach eine wenn auch nur sehr schwache magnetische Polarität besessen zu haben, und zwar, da dem Wagebalken bei diesen Versuchen stets die Südpole der beiden Magnete genähert wurden, scheint sie eine magnetische Axe gehabt zu haben, deren Nordpol in der Nähe von 0° nach 270° hin, und deren Südpol in der Nähe von 180° nach 90° hin gelegen war. Denn wenn jener erste Punkt der Scheibe den Magnetpolen näher lag, war die Anziehung stärker, als wenn der letztere diese Stellung einnahm. Die Mittel aus den Anziehungen bei zwei gerade um 180° verschiedenen Stellungen des Kreises sind sehr nahe gleich; aus 0° und 180° wird das Mittel 114,0, und aus 90° und 270° wird dasselbe 114,7. Das Mittel aus allen vier obigen Werthen beträgt also 114,3. Da später die Mittel aus zwei um 180° verschiedenen Stellungen der Scheibe genommen werden, so erscheint es rathsam, dies allgemeine Mittel gleich von vorn herein in allen den verschiedenen später zu erwähnenden Stellungen der Scheibe in Rechnung zu nehmen, da die grösste Abweichung von den einzelnen obigen Werthen kaum über zwei Scalentheile beträgt, und da ferner doch nicht in aller Strenge dafür gebürgt werden kann, dass der oben bezeichnete Zustand der Scheibe während der weiterhin mitzutheilenden Versuche derselbe geblieben ist. Die Werthe, um die es sich später handelt, werden übrigens den Betrag dieser Abweichungen vielfach übersteigen.

Nach dieser Bestimmung der Anziehung des Wagebalkens nebst seiner Kreisscheibe schritt ich zur Bestimmung der Abstossung des krystallisirten Wismuthcylinders, der in der Gabel unterhalb der Kreisscheibe befestigt und durch ein Gegengewicht im Gleichgewicht gehalten wurde. Die Ebene seines vollkommensten Blätterdurchgangs wurde ungefähr in die Richtung gestellt, welche der 0° und 180° der Kreisscheibe verbindende Durchmesser hatte. Eine genauere Bestimmung der Lage dieses Durchgangs im Verhältniss zu der Theilung der Kreisscheibe

wird sich weiterhin aus den mitzutheilenden Versuchen selbst ableiten lassen. Mit der Umdrehung der Scheibe drehte sich zugleich der Cylinder um dieselbe Anzahl Grade. Zufällig traf es, dass die mittlere Abstossung, welche der Wismuthcylinder von den Magnetpolen erlitt, ungefähr der mittleren Anziehung des Wagebalkens und der Kreisscheibe von denselben Polen gleich war, so dass der Wagebalken von seiner Ruhelage bald im Sinne einer Anziehung sich bewegte, wenn nämlich die Abstossung des Wismuths ihrem Minimum nahe war, bald im Sinne einer Abstossung, wenn nämlich die Abstossung des Wismuths ihrem Maximum nahe war.

Einwirkung der beiden Magnetpole auf den Wagebalken mit der Kreisscheibe und des Cylinders aus krystallisirtem Wismuth in den Stellungen der Kreisscheibe.

	0° Elongationen.	0° Ruhestand.
Magnet entfernt	292,3 310,0 293,0 308,6	301,3 301,1
Magnet genähert	264,0 299,4 265,9 297,5 267,0	282,1 282,1 281,9
Magnet entfernt	312,5 287,1 312,0 288,2	299,6 299,8

	30° Elongationen.	30° Ruhestand.
Magnet entfernt	502,4 106,5 487,5 121,0 472,9	300,7 300,6 300,5
Magnet genähert	435,5 131,3 423,5 143,6	280,4 280,4
Magnet entfernt	186,2 405,9 195,1 398,2	298.5 298,8

	60° Elongationen.	60° Ruhestand.
Magnet entfernt	302,6 301,0 303,4	302,0
Magnet genähert	299,5 303,0 299,1	301,1
Magnet entfernt	302,5 300,6	301,5.

	90° Elongationen.	90° Ruhestand.
Magnet entfernt	251,6 345,4 255,6 341,6	299,5 299,5
Magnet genähert	282,6 351,5 284,5 347,5	317,5 317,0
Magnet entfernt	335,0 261,0 332,2 263,6	297,3 297,2

	120° Elongationen.	120° Ruhestand.
Magnet entfernt	534,0 84,2 517,2 100,0	304,9 304,6
Magnet genähert	136,5 501,2 105,6 486,5 164,0	322,3 322,2 321,8
Magnet entfernt	445,8 161,4 433,8 172,0 423,0	300,6 300,2 300,2

	120° Elongationen.	120° Ruhestand.
Magnet genähert	218,5 416,4 226,6 407,9	319,4 319,3
Magnet entfernt	202,4 391,3 210,0 383,9	298,7 298,7

	150° Elongationen.	150° Ruhestand.
Magnet entfernt	295,5 293,8 296,0	294,7
Magnet genähert	297,6 295,2 297,4	296,3
Magnet entfernt	290,5 297,2 291,0	293,9

	180° Elongationen.	180° Ruhestand.
Magnet entfernt	72,2 519,5 91,5 501,0 108,5	300,6 300,8 300,4
Magnet genähert	458,9 109,5 443,3 122,5 428,3	280,3 279,6 279,1
Magnet entfernt	165,8 423,9 178,1 414,1	297,9 298,5

	210° Elongationen.	210° Ruhestand.
Magnet entfernt	429,5 188,1 419,7 197,0	306,3 306,1
Magnet genähert	388,3 188,4 380,4 193,2 372,6	286,3 285,6 284,8
Magnet entfernt	233,2 371,1 238,0 365,0	303,3 303,1

	240° Elongationen.	240° Ruhestand.
Magnet entfernt	40,3 553,1 60,7 531,8 80,1	301,8 301,5 301,0
Magnet genähert	508,8 95,4 488,9 122,5 472,6	297,1 296,4 296,6
Magnet entfernt	130,7 460,5 144,6 447,0	299,4 299,1

	270° Elongationen.	270° Ruhestand.
Magnet entfernt	197,1 368,6 204,5 362,0	284,6 284,8
Magnet genähert	235,4 361,4 241,8 356,3	299,8 299,9

	270° Elongationen.	270° Ruhestand.
Magnet entfernt	346,9 224,0 341,8 228,5	284,1 284,0
Magnet entfernt	363,2 244,7 358,8 249,5	302,8 302,9
Magnet genähert	377,8 259,0 373,2 263,6	317,2 317,2
Magnet entfernt	343,0 263,0 340,5	302,3

	300° Elongationen.	300° Ruhestand.
Magnet entfernt	215,6 384,5 223,1 377,9	301,9 302,1
Magnet genähert	254,0 379,7 259,4 373,8	318,1 318,0
Magnet entfernt	232,2 364,9 239,4 359,8 244,2	303,3 300,8 300,8

	330° Elongationen.	330° Ruhestand.
Magnet entfernt	447,5 163,6 435,5 174,5	302,5 302,2
Magnet genähert	423,0 181,2 413.0 190,9	299,6 299,5

	330° Elongationen.	330° Ruhestand.
Magnet entfernt	402,8 201,0 395,2 209,1	300,0 300,1

Die Ablenkungen des Balkens der Drehwage ergeben sich hieraus bei den in der ersten Reihe angegebenen Stellungen der Kreisscheibe folgendermassen:

Stellung der Kreisscheibe.	Ablenkung der Drehwage.	Corrigirt wegen Excentricität des Spiegels.	Abstossung des Wismuthcylinders.
0°	— 18,4	— 19,5	94,8
30°	— 19,2	— 20,4	93,9
60°	— 0,6	— 0,6	113,7
90°	+ 18,9	+ 20,0	134,3
120°	+ 19,7	+ 20,9	135,2
150°	+ 2,0	+ 2,1	116,4
180°	— 19,8	— 21,0	93,3
210°	— 19,0	— 20,2	94,1
240°	— 3,4	— 3,6	110,7
270°	+ 14,6	+ 15,5	129,8
300°	+ 15,3	+ 16,2	130,5
330°	— 1,6	— 1,6	112,7

wo das Zeichen + bedeutet, dass der Wismuthcylinder trotz der magnetischen Anziehung des messingenen Balkens noch um den dahinter befindlichen Betrag abgestossen wird, so dass also um die gesammte Abstossung, welche der Wismuthcylinder erfährt, zu finden, die hinter dem + befindlichen Zahlen zu der Grösse 114,3 addirt werden müssen. Das Zeichen — bedeutet dagegen umgekehrt, dass die magnetische Anziehung des Balkens die Abstossung des Wismuthcylinders noch um die dahinter befindliche Zahl übersteigt, so dass die Abstossung des Wismuthcylinders in diesen Stellungen erhalten wird durch die Differenz zwischen der 114,3 und der hinter dem Zeichen — befindlichen Zahl. Man erhält für die Abstossungen des Wismuthcylinders dann die in der vierten Columne der vorstehenden Tabelle befindlichen Zahlen, wobei freilich vorausgesetzt ist, dass die magnetische Anziehung des Wagebalkens in allen seinen oben angegebenen Stellungen dieselbe geblieben, was nicht

genau richtig ist, indem das Ende des Balkens bei einer Anziehung um 114,3 Scalentheile den Magnetpolen um etwa 2 Millimeter näher ist, als in den Stellungen, wo der Wismuthcylinder sich innerhalb der Gabel befand. Die Anziehung wird in diesen letztern Stellungen allerdings etwas geringer als 114,3 geworden sein. Eine Aenderung dieses Werthes um eine kleine Grösse wird jedoch nur die absoluten Werthe der Abstossungen des Wismuthcylinders um eine gleiche Grösse abändern, dagegen die Verhältnisse der Einwirkungen der magnetischen Kraft auf den Wismuthcylinder in seinen verschiedenen Stellungen nicht merklich abändern.

Vergleichen wir zunächst die gerade um 180° verschiedenen Werthe, so stellt sich mit aller Bestimmtheit eine magnetische Polarität, wenn auch nur in sehr geringem Grade heraus.

Stellungen der Kreisscheibe.	Abstossung.	Differenz.
30°	93,9	— 0,2
210°	94,1	
60°	113,7	+ 3,0
240°	110,7	
90°	134,3	+ 4,5
270°	129,8	
120°	135,2	+ 4,7
300°	130,5	
150°	116,4	+ 3,7
330°	112,7	
180°	93,3	— 1,5
0°	94,8	

Die Abstossungen sind, wenn die Winkel 60° bis 150° betragen, merklich grösser als bei den um 180° davon verschiedenen Stellungen, so dass also eine schwache magnetische Polarität in der Richtung von 105° bis 285° hervortritt, und zwar nordpolarisch bei 285° und südpolarisch bei 105°, weil der angenäherte Magnetpol ein Südpol war. Für das Vorhandensein einer solchen schwachen Polarität scheint auch ein späterer Versuch zu sprechen, bei welchem in der Stellung von 330° eine um einige Scalentheile grössere Abstossung erhalten wurde bei Annäherung eines Nordpoles als bei Annäherung eines Südpoles; eine genauere Bestimmung der Grösse dieser Polarität ist jedoch durch abwechselnde Anwendung eines Süd- und Nordpoles nicht zu

erlangen, wenn man sich nicht zuvor einer gleichen Vertheilung des Magnetismus an beiden Enden der Stäbe versichert hat.

Nehmen wir, um den Einfluss dieser Polarität hinwegzuheben, aus den um 180° entfernten Stellungen das Mittel, so erhalten wir im Mittel

	Ablenkungen der Drehwage.	Abstossung.
aus 0° und 180°	— 20,2	94,1
aus 30° und 210°	— 20,3	94,1
aus 60° und 240°	— 2,1	112,2
aus 90° und 270°	+ 17,7	132,0
aus 120° und 300°	+ 18,5	132,8
aus 150° und 330°	+ 0,2	114,5.

Machen wir die wohl durchaus gerechtfertigte Voraussetzung, dass das Minimum der Abstossung des krystallisirten Wismuths gerade mit der Richtung senkrecht auf der Ebene des Durchgangs steht, das Maximum derselben dagegen mit den Richtungen parallel mit dieser Ebene zusammenfällt, so lässt sich aus den vorstehenden Angaben sogleich die Stellung angeben, welche die Ebene des Durchgangs in den verschiedenen, durch die Theilung der Kreisscheibe angegebenen Stellungen einnahm. Man sieht, dass die Stellung, bei welcher das Minimum der Abstossung eintritt, zwischen 0° und 30° (oder 180° und 210°) und das Maximum der Abstossung zwischen 90° und 120° (oder 270° und 300°) der Stellung der Kreisscheibe fällt. Die Ebene des Durchgangs würde also sehr nahe senkrecht auf der Richtung der magnetischen Axe der Magnetstäbe gestanden haben bei der Stellung der Kreisscheibe auf 15°, dagegen in dieser Richtung bei der Stellung auf 195°; die Normale auf der Ebene des Durchgangs hätte also in der Richtung der magnetischen Axe gelegen bei der Stellung der Kreisscheibe auf 15°, dagegen senkrecht darauf bei der Stellung auf 195°. Beziehen wir die oben angeführten Messungen der Abstossungen des Wismuthcylinders auf die Lage, welche die auf seinem Durchgange senkrechte Normale mit der magnetischen Axe der Stäbe bildet, so müssen die Winkel der vorstehenden Tabelle um 15° verringert werden, so dass man die nachfolgenden Abstossungen erhält, wenn der Winkel zwischen der Normale auf dem Durchgange und der magnetischen Axe der Stäbe der nachstehend bezeichnete ist:

Winkel der Normale auf dem Durchgange mit der magnetischen Axe.	Ablenkungen der Drehwage.	Abstossungen.
165°	— 20,2	94,1
15°	— 20,3	94,1
45°	— 2,1	112,2
75°	+ 17,7	132,0
105°	+ 18,5	132,8
135°	+ 0,2	114,5

Aber die Richtungen 15° und 165°, ebenso 75° und 105°, und ebenso 45° und 135° machen mit der Normale auf beiden Seiten gleiche Winkel, so dass aus den zu zwei so eben neben einander gestellten Werthen sich ein neues Mittel nehmen lässt, da die Abstossungen auf jeder Seite der Normale, wenigstens innerhalb einer durch dieselbe gelegten Ebene auf gleiche Weise wachsen werden. Wir erhalten also zuletzt drei Grössen, deren jede das Mittel aus vier Beobachtungen in solchen Stellungen, welche symmetrisch zur Normale auf der Ebene des Durchgangs gelegen sind, darstellt. Wenn der Winkel zwischen der Normale und der magnetischen Axe, wobei erstere nach rechts oder links liegen kann,

beträgt	so ist im Mittel aus vier Beobachtungen	
	die Ablenkung der Drehwage.	Abstossungen.
15°	— 20,2	94,1
45°	— 1,0	113,3
75°	+ 18,1	132,4

Auf das Gesetz, nach welchem die Einwirkung des Magnetismus mit dem Quadrate des Sinus des Winkels zwischen der Normale auf dem Blätterdurchgange und der magnetischen Axe der Stäbe sich ändert, leitet die Thatsache, dass die Abstossungen für gleich grosse positive und negative Winkel, wie wir vorhin gesehen haben, gleiche Werthe besitzen. Versuchen wir unter der Voraussetzung dieses Gesetzes die vorstehenden, aus der Beobachtung abgeleiteten Werthe durch die Formel

$$n = a + b \; sin. \; \varphi^2,$$

wo n die Ablenkung, a und b zwei Constanten, und zwar

$$a = 90,7$$

$$\text{und } b = 45,3$$

ist, und φ den Winkel zwischen der Normale und der Richtung der magnetischen Axe bedeutet, zu berechnen, so erhalten wir

Winkel	beobachtet	berechnet	Differenz.
15°	94,1	93,7	+ 0,4
45°	113,3	113,3	0,0
74°	132,4	133,0	— 0,6

Die hinreichende Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe zeigt also, dass die Abstossung, welche bei dem Winkel 0 ein Minimum ist, mit dem Quadrate des Sinus nach beiden Seiten hin zunimmt. Das Minimum der Abstossung ist gegeben durch $a = 90,7$, das Maximum durch $a + b = 136,0$. Das Verhältniss zwischen beiden ist 90,7 : 136 = 0,67 : 1, und dieser Werth stimmt mit den Versuchen an dem Parallelepipedum, durch welches sich ergab, dass dies Verhältniss kleiner sein musste, als 0,72 : 1.

Wollte man die veränderte Einwirkung des Magnetismus auf das krystallisirte Wismuth einer wirklichen Anziehung des letztern in der Richtung der Normale der Ebene seines vollkommensten Durchgangs zuschreiben, so hätte man die Rechnung nach folgender Formel zu führen:

$$n = A - b \cos \varphi^2,$$

wo A die allgemeine Abstossung, welche das Wismuth in Folge der Einwirkung des Magnetismus auf seine Masse erleidet, und b die Anziehung in der Richtung der erwähnten Normale bedeutet. A also = 136,0 und b wieder = 45,3 ist. Die Rechnung giebt natürlich für die als Abstossung sich darstellende Gesammteinwirkung des Magnetismus auf das krystallisirte Wismuth dieselben Werthe als vorhin, da ja die letzte Formel nur eine Umgestaltung der frühern ist.

Derselbe, *Ueber das vermeintliche Leitungsvermögen der Marekanite für Elektricität.*

In den Beiträgen zur Monographie des Marekanits, Turmalins und brasilianischen Topases in Bezug auf Elektricität, welche in den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1829 abgedruckt sind, hebt P. Erman ein, wie es ihm scheint, eigenthümliches und sonderbares Verhalten der Marekanite in Bezug auf ihre Fähigkeit, die Elektri-

cität zu leiten und zu isoliren, hervor. Eine Untersuchung der durch Reibung der Marekanite gegen Tuch erregten Elektricität, welche in einigen Exemplaren positiv, in einigen Null, in einigen negativ, ja sogar in einigen an verschiedenen Stellen positiv und negativ erschien, führte ihn nämlich dahin, den Grund dieser Anomalie in geringen Temperaturunterschieden, wie sie durch die Berührung mit der Hand oder durch einen zufälligen Sonnenblick erzeugt werden können, und namentlich in dem dadurch abgeänderten Leitungs- und Isolirungsvermögen zu suchen. Er wurde in dieser Annahme um so mehr bestärkt, als er später fand, dass alle isolirt gehaltenen Marekanite durch Reiben gegen Tuch bei jeder Temperatur positive Elektricität zeigten, während er sie bei den früheren Prüfungen, wo er sie als Nichtleiter betrachtete, mit der freien Hand gehalten hatte.

Erman verbarg sich das Abenteuerliche (wie er selbst sich ausdrückt) dieser Annahme eines Uebergangs aus dem Leitenden in das Isolirende durch so geringe Temperaturveränderungen, wie sie die Wärme der Hand erzeugen kann, nicht; dessenungeachtet glaubte er aber doch aus seinen Versuchen den Schluss ziehen zu müssen, dass alle Marekanite, sowohl die vollkommen als unvollkommen verglasten, und auch der Perlstein vom *Cap de Gate* und die Mehrheit der Obsidiane bei einer Temperatur, welche den Grad 15° beiläufig nicht übersteigt, fast so vollkommen leiten wie Metall, bei steigender Temperatur aber immer unvollkommner leiten und bei 30° schon vollkommene Isolatoren sind. «Ich nenne (fährt Erman fort) 30° als die Grenze, wegen der höchst auffallenden Erscheinung, dass jeder Marekanit, den man mit der gewöhnlichen Temperatur des Zimmers von 10° — 14° an das geladene Elektrometer hält, ihm augenblicklich alle Divergenz nimmt. Behält man das Exemplar in der geschlossenen Hand, und prüft es wieder, nachdem es die Temperatur derselben angenommen, wozu bei kleinen Massen oft nur einige Minuten gehören, so findet man einen vollkommenen Isolator. Erreicht der Sonnenschein zufällig die Stelle, wo das früher leitende Exemplar lag, oder legt man es auf eine dunkle Stelle, welche die Sonne kurz vorher beschienen, so findet dieselbe Umwandlung statt, und es versteht sich von selbst, dass eine absichtlich erwärmte Metallplatte Dasselbe im höchsten Grade bedingt.»

Dieser Uebergang, wenn er statthätte, aus dem leitenden Zustande in den isolirenden durch eine so geringe Temperatur-

erhöhung wäre um so auffallender, weil sonst die Glasarten durch Erhöhung der Temperatur bis zum Glühen Leiter werden, und Erman kam deshalb auch schon auf die Vermuthung, dass die ganze Erscheinung auf dem hygroskopischen Zustande der Flächen beruhen könnte, so dass das Isolirungsvermögen bei einer Temperatur von etwa 30^0 seinen Grund in der Verdampfung des zuvor bei niedern Temperaturen auf der Oberfläche des Marekanits condensirten Wasserdampfs fände. Erman glaubte aber diese Vermuthung als vollkommen unbegründet zurückweisen zu müssen, weil er den directen Beweis führen zu können vermeinte, dass die Umwandlung der Leitungsverhältnisse der Marekanite bei veränderter Temperatur nicht durch die hygroskopische Feuchtigkeit bedingt wäre. Er sperrte nämlich Marekanite, sowohl vollkommen als unvollkommen verglaste, und ebenso Dichroite während mehrerer Tage in einem verschlossenen Gefässe über Schwefelsäure; als er sie dann in diesem Zustande «der vollkommenen Trockenheit» (?) bei der im Gefäss selbst angenommenen Temperatur von 9½^0 prüfte, leiteten sie eben so vollkommen wie die im Zimmer frei liegenden. «Es galt ganz gleich (sagt Erman), das Elektrometer mittelst dieser ganz trocknen Substanzen oder mittelst des Metalles zu entladen; also ist die Ursache ihres Leitens nicht in adhärirender Feuchtigkeit zu suchen, und ebenso wenig ist die Verjagung derselben die Ursache des Isolirens.»

Erman hat diesem Phänomen des so schnellen Uebergangs aus dem leitenden Zustande in den isolirenden durch so wenige Grade Erhöhung der Temperatur ein grosses Interesse beigelegt, wie sich besonders auch aus Dem ergibt, was Erman an die so eben angeführte Stelle anschliesst. Er sagt nämlich: «Erwünscht wäre es, wenn dieser Temperaturidiosynkrasie des Marekanits bei einer grossen Mehrheit anderer Fossilien nachgespürt würde; wenn es z. B. sich fände, dass andere mehr verbreitete Bestandtheile der Erdoberfläche bei dem blossen Temperaturwechsel, den die Einstrahlung der Sonne bedingen kann, abwechselnd leiten und isoliren, so hätte man vielleicht einen neuen Anhaltepunkt gewonnen, um den elektrischen Gegensatz der Atmosphäre gegen den Boden in seinen mit der Tageszeit fortschreitenden Variationen denkbar zu machen, und wenn am Ende ähnliche, ebenso leicht eingeführte Uebergänge aus Leiten in Isoliren vielleicht für die Wolken selbst postulirt oder vielmehr nachgewiesen werden könnten, so würde sich für die Me-

teorologie ein unerwarteter Ausweg aus einer nicht geringen Verlegenheit eröffnen.»

Bei der Wichtigkeit, welche, wie man sieht, Erman diesem Phänomen beilegte, durfte man wohl voraussetzen, dass derselbe alle möglichen Vorsichtsmassregeln getroffen haben würde, um jede Leitung durch condensirte Wasserdämpfe zu vermeiden; daher ist es wohl zu erklären, dass Niemand bis jetzt an eine Wiederholung dieser Versuche gedacht hat. Vielleicht hat auch eine etwas flüchtige Lesung der Stelle, wo Erman sagt, dass die durch Absperren über Schwefelsäure vollkommen getrockneten Marekanite, wenn er sie bei der im Gefässe selbst angenommenen Temperatur von $9\frac{1}{2}^0$ prüfte, die Elektricität eben so vollkommen leiteten als die im Zimmer frei liegenden, die Idee erregt, als habe Erman die Marekanite in Bezug auf ihre Leitungsfähigkeit im Gefässe selbst geprüft. Eine Prüfung auf diese zuletzt angegebene Weise der Marekanite in dem ausgetrockneten Gefässe selbst hat jedoch Erman nicht angestellt, er hat vielmehr den Marekanit aus dem Gefässe herausgenommen und wahrscheinlich mit der Hand haltend an das geladene Elektrometer angelegt. Aber gerade dieses Herausnehmen des Marekanits, der bis zu einer Temperatur von $9\frac{1}{2}^0$ abgekühlt war, aus dem trocknen Raume, und das Eintauchen desselben in die mehr oder weniger feuchte Stubenluft, deren Feuchtigkeit gerade in der Umgebung des Marekanits noch durch die Annäherung der ausdünstenden Hand und des ausgestossenen Athems vermehrt werden musste, machte, wie man sogleich erkennt, die von Erman vermeinte vollkommene Befreiung der Oberfläche des Marekanits von condensirtem Wasserdampfe völlig illusorisch. Sollte der Versuch beweisend und entscheidend sein, so musste die Prüfung des Marekanits auf sein Leitungs- oder Isolationsvermögen in dem vollkommen ausgetrockneten Gefässe selbst geschehen.

Schon längere Zeit glaubte ich in dem soeben angedeuteten Verfahren Erman's den Grund zu den von ihm gefundenen Resultaten des schnellen Uebergangs des Leitungsvermögens in das Isolationsvermögen, der mit allen sonstigen Erfahrungen nicht in Uebereinstimmung zu bringen war, vermuthen zu müssen, konnte aber wegen Mangel an Marekaniten diese Muthmassung nicht durch den Versuch erhärten. Eine Reihe von anderweitigen Untersuchungen führte mich aber im vorigen Winter auf die Beantwortung der Frage nach dem Vorhandensein oder dem

Fehlen eines solchen Uebergangs zurück, und die Gefälligkeit meines verehrten Collegen Naumann setzte mich durch bereitwillige Darleihung einer grössern Anzahl schöner Marekanite in den Stand, die längst beabsichtigten Versuche auszuführen. Die Art, wie dieselben auszuführen, ist durch das Vorhergehende schon bestimmt vorgeschrieben.

Auf einen genau plangeschliffenen Glasteller wurde ein Elektrometer mit einem auf die nachher anzugebende Weise daran angelegten Marekanit und ein Gefäss mit concentrirter Schwefelsäure gestellt, und über Beides dann eine grosse, sonst zu Versuchen mit der Luftpumpe dienende Glasglocke, welche in ihrem obern Theile eine Messingfassung mit einem beweglichen, durch eine Stopfbüchse hindurchgehenden Messingstabe trug, durch etwas aufgestrichenen Talg luftdicht übergesetzt. Das Elektrometer bestand einfach aus einer Glaskugel, in welcher zwei Goldblättchen von dem untern Ende eines in ihrem Halse befestigten Stäbchens herabhingen; drei Füsse aus Bruchstücken von Siegellackstangen trugen die Kugel. Das obere Ende des Stäbchens, an welchem die Goldblättchen festsassen, war mit einer kleinen Kugel versehen, und auf diese Kugel war der auf sein Leitungs- oder Isolationsvermögen zu untersuchende Marekanit aufgelegt. Um denselben in dieser Lage zu erhalten, war seine obere Hälfte in einen Kork eingedrückt, und um die ableitende Fläche gegen den Kork hin möglichst gross zu machen, war die Vertiefung des Korkes, in welche er eingesetzt war, mit Stanniol ausgelegt. Dieses Stanniol stand wieder in metallischer Verbindung mit einem dicken Kupferdraht, dessen eines Ende in den Kork eingesteckt, dessen anderes aber auf einer einige Zoll langen Schellackstange, welche neben dem Halse auf der Glaskugel angeschmolzen, befestigt war. An dem Messingstabe, welcher durch die Stopfbüchse im obern Theile der Glasglocke ging, war innerhalb der Glocke ein Kupferdraht horizontal befestigt, und durch die Verschiebbarkeit des Stabes liess sich dieser Draht sowohl mit dem die Goldblättchen tragenden Stäbchen als auch mit dem oberhalb des Marekanits befindlichen Kupferdraht in Verbindung bringen.

Man prüfe einen Marekanit bei etwas niedrigen Temperaturen in der Luft, und man wird finden, wie solches Erman angegeben, dass er dem Goldblattelektrometer eine zuvor ertheilte Divergenz augenblicklich hinweg nimmt. Denselben Marekanit setze man jetzt in den Kork ein, bringe ihn auf den Knopf des

Elektrometers und setze die Glasglocke über das Elektrometer und das Gefäss mit Schwefelsäure. Man theile jetzt ohne weiteren Zeitverlust den Goldblättchen Elektricität mit, indem man den horizontalen Kupferdraht an das Stäbchen, welches sie trägt, anlegt. Sodann entferne man durch Umdrehen des Messingstabes mittelst einer Siegellackstange den horizontalen Draht von dem Stäbchen des Elektrometers, lege denselben an den oberhalb des Marekanits befindlichen, den Kork haltenden Kupferdraht und setze ihn mit der Erde in Verbindung. Man wird sehen, dass die Goldblättchen sehr schnell zusammen sinken, ein Beweis, dass die Elektricität von dem Elektrometer aus über den Marekanit hinweg zu dem obern Kupferdraht eine gute Ableitung findet. Wiederholt man den Versuch nochmals, so werden die Goldblättchen weniger rasch zusammen sinken; die Zeit, welche sie dazu nöthig haben, vergrössert sich immer mehr, je mehr die Schwefelsäure die unter der Glocke und auf der Oberfläche des Marekanits befindlichen Wasserdämpfe condensirt, so dass bald eine völlige Isolation eintritt. Wie vortrefflich der Marekanit bei völlig trockner Oberfläche selbst bei einer Temperatur von 4° C. die Elektricität isolirt, mag folgender Versuch darthun. An einem Nachmittage, als die Glocke seit einigen Tagen nicht abgehoben, also völlig ausgetrocknet war, wurde dem Elektrometer Elektricität mitgetheilt, so dass die Goldblättchen wohl einen Zoll divergirten; der horizontale Draht wurde an den obern Kupferdraht angelegt und mit der Erde ableitend verbunden. Nach zwei Stunden zeigte sich trotz der Temperatur von nur 4° C. eine nur sehr geringe Verkleinerung der Divergenz und selbst am andern Morgen gegen 10 Uhr fand ich noch eine Divergenz von einigen Linien. Dass nach dem Abheben der Glocke der kalte Marekanit wieder durch sofortigen Niederschlag des Wasserdampfs auf seiner Oberfläche zu einem Leiter wird, bedarf jetzt wohl keiner weiteren Beweise mehr.

Jene von Erman behauptete Leitungsfähigkeit des Marekanits für Elektricität bei niederen Temperaturen hat also nur in den auf seiner Oberfläche niedergeschlagenen Wasserdämpfen ihren Grund. Ein Gleiches wird auch von den übrigen oben neben dem Marekanit angeführten Mineralien, die ich keiner weiteren Prüfung, da sie mir überflüssig schien, unterworfen habe, gelten.

M. W. Drobisch, *Ueber eine Aufgabe Schooten's.*

In dem Anhange zu *Schooten's* Ausgabe der Geometrie des *Descartes* (Amsterdam 1683) findet sich (p. 372) folgende Aufgabe: *Tempore verno erectis alicubi terrarum ad perpendiculum tribus baculis in plano horizontali in punctis A, B et C, quorum is qui in A sit* 6 *pedum, qui in B* 18 *pedum, et qui in C* 8 *pedum, existente linea AB* 33 *pedum: contingit quodam die, extremitatem umbrae baculi A transire per puncta B et C, baculi autem B per puncta A et C, et baculi C per punctum A, unde fit, ut etiam per punctum B sit transitura. Quaeritur jam, quo terrae loco atque anni die haec evenerint.* Ausser der ziemlich weitläufigen Auflösung *Schooten's*, die er selbst *solutionem artificiosissimam* nennt, ist mir nur noch die weit kürzere *Newton's (Arithm. univers. probl.* 55*)* und die von *Trembley* (*Bode's* astron. Jahrb. für 1798 p. 148) bekannt geworden. Alle drei Auflösungen gehen von der Betrachtung aus, dass die Schatten der Stäbe Kegelschnitte beschreiben müssen, und geben zwar allgemeine Methoden zur Berechnung der gesuchten Grössen, nicht aber allgemeine Formeln an, sondern beschränken sich auf die angenommenen speciellen Zahlwerthe; sie erörtern daher auch nicht die Grenzen der gegebenen Werthe, innerhalb deren die Auflösung reelle Resultate giebt. Die folgende rein trigonometrische Auflösung sucht alles Dieses zu erreichen und enthält zugleich die vollständige Bestimmung der Lage der Stäbe sowohl gegen einander als gegen den Meridian.*)

Bezeichnen wir allgemein die Längen der in den Punkten A, B, C senkrecht auf der Horizontalebene errichteten Stäbe der Reihe nach durch a, b, c; die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks ABC resp. durch α, β, γ; die ihnen gegenüberliegenden Winkel durch A, B, C; die Polhöhe durch φ und die Declination der Sonne durch δ. Sei ferner

h die Sonnenhöhe, bei welcher der Schatten von a d. Punkt B trifft,
H » » » » » » » b » » A »
h' » » » » » » » b » » C »

*) Eine der obigen ähnliche Aufgabe, die aber eine ganz andere Behandlung erheischt, haben *Pfaff* und *Mollweide* (v. *Zach's* monatl. Corresp. XXII, 287 u. 323) gelöst.

H' die Sonnenhöhe, bei welcher der Schatten von c d. Punkt B trifft,
h'' » » » » » » » c » » A »
H'' » » » » » » » a » » C »

Endlich seien ζ, ζ', ζ'' die in demselben Sinne (östlich oder westlich vom Südpunkte) genommenen, mit den Höhen H, H', H'' resp. zusammengehörigen Azimuthe der Sonne, woraus von selbst folgt, dass den Höhen h, h', h'' resp. die Azimuthe $180 + \zeta$, $180 + \zeta'$, $180 + \zeta''$ zugehören werden.

Nach den Bedingungen der Aufgabe müssen nun $90 - \varphi$ und $90 - \delta$ mit dem Complement einer jeden der sechs vorstehenden Sonnenhöhen zusammengenommen die Seiten eines sphärischen Dreiecks darstellen, in welchem der der Seite $90 - \delta$ gegenüberliegende Winkel das Supplement des mit der Höhe zusammengehörigen Azimuths ist. Hierdurch erhält man, wenn man, wie es die Natur der Aufgabe gestattet, die Declination der Sonne als unveränderlich ansieht, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\delta &= \sin\varphi \sin H + \cos\varphi \cos H \cos\zeta \\
\sin\delta &= \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos\zeta \\
\sin\delta &= \sin\varphi \sin H' + \cos\varphi \cos H' \cos\zeta' \\
\sin\delta &= \sin\varphi \sin h' - \cos\varphi \cos h' \cos\zeta' \\
\sin\delta &= \sin\varphi \sin H'' + \cos\varphi \cos H'' \cos\zeta'' \\
\sin\delta &= \sin\varphi \sin h'' - \cos\varphi \cos h'' \cos\zeta''
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (1)$$

Betrachtet man vorläufig sämmtliche sechs Höhen als bekannte Grössen (indem man etwa annimmt, dass unter einer gewissen Breite und an einem gewissen Tage des Jahres durch Versuche die Stellung der Stäbe ausgemittelt sei, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllt), so bleiben nur fünf Unbekannte, nämlich $\varphi, \delta, \zeta, \zeta', \zeta''$ übrig. Diejenigen Werthe dieser Grössen, welche fünf von den vorstehenden sechs Gleichungen verificiren, werden daher, in der sechsten substituirt, diese zu einer identischen Gleichung machen. Dies bedeutet aber soviel als: Wenn an einem gewissen Orte und Tage die Schattenspitzen von zweien der drei Stäbe durch die Fusspunkte jedes der beiden übrigen Stäbe gehen, die Schattenspitze des dritten Stabes aber durch den Fusspunkt eines der beiden übrigen Stäbe geht, so muss sie auch durch den Fusspunkt des andern Stabes gehen. Dies ist das Theorem, das Schooten seiner Auflösung voranschickt.

Aus den sechs Gleichungen unter (1) lässt sich ferner zeigen, dass von den sechs Grössen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ zwei durch die übrigen vier bestimmt werden. Es ist nämlich zunächst

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} H &= \frac{b}{\gamma}; \quad \operatorname{tg} h = \frac{a}{\gamma} \\ \operatorname{tg} H' &= \frac{c}{\alpha}; \quad \operatorname{tg} h' = \frac{b}{\alpha} \\ \operatorname{tg} H'' &= \frac{a}{\beta}; \quad \operatorname{tg} h'' = \frac{c}{\beta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Eliminirt man nun aus den beiden ersten Gleichungen unter (1) ζ, so ergiebt sich

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \delta} = \frac{\cos H + \cos h}{\sin H \cos h + \cos H \sin h} = \frac{\cos \frac{1}{2}(H-h)}{\sin \frac{1}{2}(H+h)} \quad \ldots \quad (3)$$

woraus, wenn man die Werthe von $\operatorname{tg} H$ und $\operatorname{tg} h$ unter (2) einführt, folgt

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \delta} = \frac{\sqrt{a^2+\gamma^2} + \sqrt{b^2+\gamma^2}}{a+b}.$$

Auf gleiche Weise ergeben sich durch Elimination von ζ' aus der dritten und vierten, und von ζ'' aus der fünften und sechsten Gleichung unter (1) für $\frac{\sin \varphi}{\sin \delta}$ resp. d. Werthe $\frac{\sqrt{b^2+\alpha^2} + \sqrt{c^2+\alpha^2}}{b+c}$, $\frac{\sqrt{c^2+\beta^2} + \sqrt{a^2+\beta^2}}{c+a}$. Es muss daher sein

$$\frac{\sqrt{a^2+\gamma^2} + \sqrt{b^2+\gamma^2}}{a+b} = \frac{\sqrt{b^2+\alpha^2} + \sqrt{c^2+\alpha^2}}{b+c}$$
$$= \frac{\sqrt{c^2+\beta^2} + \sqrt{a^2+\beta^2}}{c+a}. \quad \ldots \quad (4)$$

so dass also zwei von den sechs Grössen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ durch die übrigen bestimmt werden. Seien die zu bestimmenden Grössen α und β, so folgt, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{a^2+\gamma^2} + \sqrt{b^2+\gamma^2}}{a+b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(H-h)}{\sin \frac{1}{2}(H+h)} = m$$

gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2m}\sqrt{(m^2-1)\,[m^2(b+c)-(b-c)^2]} \\ \beta &= \frac{1}{2m}\sqrt{(m^2-1)\,[m^2(a+c)-(a-c)^2]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

welche Ausdrücke stets reelle Werthe haben. Bequemer noch für die numerische Berechnung von α und β ist es,

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(H-h)}{\sin \frac{1}{2}(H+h)}(b+c) = \lambda \quad \text{und} \quad \frac{\cos \frac{1}{2}(H-h)}{\sin \frac{1}{2}(H+h)}(a+c) = \mu$$

zu setzen, wodurch man erhält

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2\lambda}\sqrt{(\lambda+b+c)(\lambda-b-c)(\lambda+b-c)(\lambda-b+c)}\\ \beta &= \frac{1}{2\mu}\sqrt{(\mu+a+c)(\mu-a-c)(\mu+a-c)(\mu-a+c)}\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Ferner ergiebt die Elimination von δ aus der ersten und zweiten Gleichung unter (2)

$$\operatorname{tg}\varphi = -\cot\tfrac{1}{2}(H-h)\cos\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ebenso folgt aus der dritten und vierten dieser Gleichungen

$$\operatorname{tg}\varphi = -\cot\tfrac{1}{2}(H'-h')\cos\zeta'.$$

Es ist daher

$$\cos\zeta' = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(H'-h')\cot\tfrac{1}{2}(H-h)\cos\zeta. \quad . \quad . \quad (8)$$

Nun ist aber auch, wie unmittelbar erhellt, $\zeta'-\zeta = 180-B$; daher

$$\operatorname{tg}\zeta = -\cot B - \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(H'-h')\cot\frac{1}{2}(H-h)}{\sin B}, \quad . \quad . \quad (9)$$

und B durch die bekannte Formel

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

gegeben. Aus (9) folgen zwei Werthe von ζ, von denen, jenachdem der rechte Theil der Gleichung einen $\begin{Bmatrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{Bmatrix}$ Werth hat, der eine im $\begin{Bmatrix}\text{ersten}\\\text{zweiten}\end{Bmatrix}$, der andre im $\begin{Bmatrix}\text{dritten}\\\text{vierten}\end{Bmatrix}$ Quadranten liegt. Der eine dieser beiden Werthe giebt daher immer einen positiven, der andre einen negativen Werth von $\cos\zeta$. Da nun $\operatorname{tg}\varphi$ immer positiv sein muss, so findet man φ, wenn man in (6), jenachdem $H-h \gtrless 0$, den $\begin{Bmatrix}\text{negativen}\\\text{positiven}\end{Bmatrix}$ Werth von $\cos\zeta$, den (9) giebt, substituirt. Ist auf diese Weise φ bestimmt. so folgt aus (3)

$$\sin\delta = \frac{\sin\frac{1}{2}(H+h)}{\cos\frac{1}{2}(H-h)}\sin\varphi.$$

Man erhält eine zur logarithmischen Berechnung von ζ besser als (9) geeignete Formel, wenn man aus (8) die Werthe von $\cos\zeta'+\cos\zeta$ und $\cos\zeta'-\cos\zeta$ ableitet und den letzteren derselben durch den ersteren dividirt. Dies giebt

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\zeta'+\zeta)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\zeta'-\zeta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(H-h-H'+h')}{\sin\frac{1}{2}(H-h+H'-h')}.$$

Da nun $\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta) = 90-\frac{1}{2}B$, also $\frac{1}{2}(\zeta'+\zeta) = 90-\frac{1}{2}B+\zeta$ ist, so folgt hieraus

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}B-\zeta)=\frac{\sin\frac{1}{2}(H-h+H'-h')}{\sin\frac{1}{2}(H-h-H'+h')}\cot\tfrac{1}{2}B\,, \quad . \quad (11)$$

welche Formel in Verbindung mit (10) ζ bestimmt.

Da die Azimuthe nach Willkür östlich oder westlich genommen werden können, ohne dass dies auf die Bestimmung der Werthe von φ und δ Einfluss hat, so giebt es für das Dreieck ABC immer zwei gegen die Mittagslinie symmetrische Lagen, welche der Aufgabe genügen, was auch aus unmittelbarer Betrachtung erhellt.

Für die von Schooten angenommenen Werthe $a=6$, $b=18$, $c=8$, $\gamma=33$, folgt aus (6) $\alpha=35{,}96217$, $\beta=19{,}50719$. Hieraus erhält man nach (2)

$$H=28^0\ 36'\ 38''; \qquad h=10^0\ 18'\ 17'';$$
$$H'=12^0\ 32'\ 28''; \qquad h'=26^0\ 35'\ 19''.$$

Ferner folgt aus (10)

$$\tfrac{1}{2}B=16^0\ 15'\ 4'';$$

aus (11)

$$\zeta=180^0+8^0\ 19'\ 56'';$$

endlich aus (7) und (3)

$$\varphi=80^0\ 45'\ 4''; \qquad \delta=19^0\ 27'\ 8'';$$

genau dieselben Werthe, die Newton und Trembley finden, indess sie Schooten nur bis auf die Minuten berechnet. In einem gemeinen Jahre fällt diese Declination der Sonne auf den 18. Mai und 26. Juli.

Es bleibt nun noch übrig zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die allgemeine Auflösung der Aufgabe zu reellen Werthen führt. Da δ als Declination der Sonne eine constante Grenze Δ (beiläufig $23^0\ 28'$) nicht übersteigen kann, der grösstmögliche Werth von φ aber 90^0 ist, so muss nach (3) sein

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(H+h)}{\cos\frac{1}{2}(H-h)}\leqq\sin\Delta\,.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}H\leqq\frac{\sin\Delta-\operatorname{tg}\frac{1}{2}h}{1-\sin\Delta\operatorname{tg}\frac{1}{2}h};$$

$$\operatorname{tg}H\leqq\frac{2\sin\Delta}{\cos^2\Delta\cos h}-\operatorname{tg}h;$$

oder wenn für $\operatorname{tg}H$ und $\operatorname{tg}h$ die Werthe unter (2) gesetzt werden,

$$b\leqq\frac{2\sin\Delta}{\cos^2\Delta}\sqrt{a^2+\gamma^2}-a\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

was für $\Delta=23^0\ 28'$ giebt

$$b\leqq 0{,}94653\,.\sqrt{a^2+\gamma^2}-a\,.$$

Für $a = 6$, $\gamma = 33$ folgt hieraus, dass $b \leqq 25{,}74758$ sein muss. Da a aber auch stets $b > 0$ sein muss, so ist die Bedingung der Möglichkeit dieser Ungleichung

$$\gamma > a\sqrt{\frac{1}{4}\frac{\cos^4 \varDelta}{\sin^2 \varDelta} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$
$$> 0{,}34085 \, . \, a \, .$$

Endlich müssen die Werthe von α und β in (5) so beschaffen sein, dass sie mit γ zusammen die Seiten eines Dreiecks bilden können; es muss also $\alpha + \beta > \gamma$ und $\alpha - \beta < \gamma$ sein. Beide Bedingungen sind gemeinsam enthalten in der Ungleichung

$$4\,\alpha^2\,\beta^2 > (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2$$

oder $$2\,(\alpha^2 + \beta^2)\,\gamma^2 > (\alpha^2 - \beta^2)^2 + \gamma^4.$$

Substituirt man in derselben die Werthe von α und β, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction, wenn zur Abkürzung

$$4\,m^2\,\gamma^2 - (m^2 + 1)^2\,(a - b)^2 = A,$$
$$4\,m^2\,\gamma^2 - (m^2 - 1)^2\,(a - b)^2 = B,$$
$$4\,m^2\,\gamma^2 - (m^2 - 1)^2\,(a + b)^2 = C$$

gesetzt wird,

$$c > \frac{-(m^2 + 1)\,(a + b)\,B + \sqrt{ABC + (m^2 + 1)^2\,(a + b)^2\,B^2}}{2\,(m^2 - 1)\,A}. \qquad (14)$$

Für $a = b$ vereinfacht sich dieser Ausdruck und giebt

$$c > \frac{a}{\gamma^2}[-(2\,a^2 + \gamma^2) + \sqrt{(2\,a^2 + \gamma^2)^2 + \gamma^4}].$$

Für $a = 6$, $b = 18$, $\gamma = 33$ muss hiernach

$$c > 0{,}454255$$

sein. In der That giebt dieser Werth nach (5)

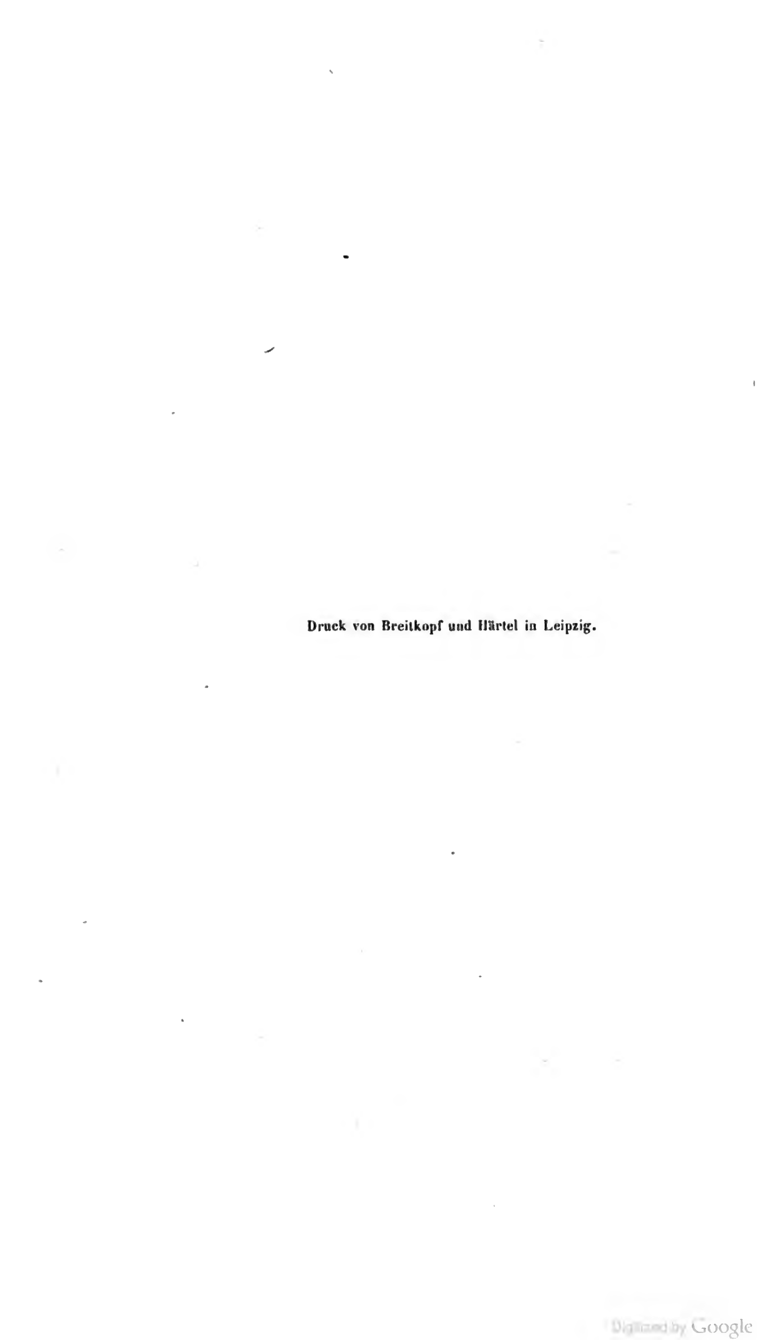
$$\alpha = 24{,}38301 \text{ und}$$
$$\beta = 8{,}61667,$$

wovon die Summe 32,99998, also sehr nahe $= 33 = \gamma$ ist. Von den vier gegebenen Werthen a, b, c, γ ist also nur einer völlig willkürlich. Ist derselbe a, so ist b durch (12), c durch (13), γ durch (14) begrenzt, wenn die Auflösung mögliche Werthe geben soll.

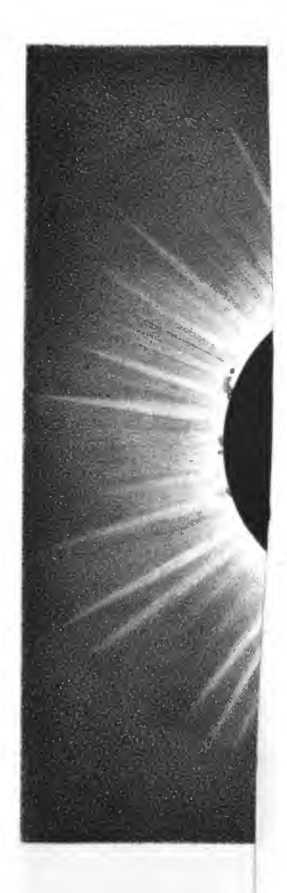
Hinsichtlich der Werthe von α und β mag zum Schluss noch bemerkt werden, dass, da

$$\alpha^2 - \beta^2 = \left(\frac{m^2 - 1}{4\,m^2}\right)(b - a)\,[(m^2 - 1)\,(a + b) + 2\,(m^2 + 1)\,c],$$

und $m^2 - 1$ immer positiv ist, jenachdem $a \gtreqless b$, $\alpha \lesseqgtr \beta$ wird.



Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.



Totale S

INHALT.

Seite

E. F. Weber, über die Längenverhältnisse der Fleischfasern der Muskeln im Allgemeinen 64

D'Arrest, Bericht über die Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss zu Königsberg in Preussen am 28. Juli 1851 86

Hankel, Messungen der Abstossungen des krystallisirten Wismuths durch die Pole eines Magnets mittelst der Drehwaage . . . 99

Derselbe, über das vermeintliche Leitungsvermögen der Marekanite für Electricität 118

Drobisch, über eine Aufgabe Schooten's 124

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE

JAHRGANG 1852.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

INHALT.

Möbius, Beitrag zu der Lehre von der Auflösung numerischer Gleichungen . . . . S. 1

Naumann, Versuch einer neuen Interpretation der Turmalin-Analysen . . . . - 4

Reich, über die Regenmenge zu Freiberg . . . . - 15

Lehmann, über die Krystallisirbarkeit eines der Hauptbestandtheile der Blutkörperchen . . . . - 23

Schlömilch, über die Auflösung von Funktionsgleichungen . - 27

D'Arrest, Sphärische Sätze . . . . - 34

Möbius, über eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen . . . . - 41

Hansen, neue directe Auflösung des Kepplerschen Problems . - 55

Drobisch, über die Wellenlängen und Oscillationszahlen der farbigen Strahlen im Spectrum . . . . - 57

Hankel, über die Messung der atmosphärischen Elektricität . - 74

Lehmann, über den krystallisirbaren Stoff des Blutes . . . - 78

E. H. Weber, über den Raumsinn und die Empfindungskreise in der Haut und im Auge . . . . S. 85

Wilhelm Weber, Verbesserung einer Formel in den elektrodynamischen Maassbestimmungen . . . . — 164

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1852.

I.

LEIPZIG.
BEI S. HIRZEL.
1853.

SITZUNG AM 21. FEBRUAR 1852.

A. F. Möbius, *Beitrag zu der Lehre von der Auflösung numerischer Gleichungen.*

Bezeichnet X eine gegebene reelle Function von x, und soll für x ein reeller Werth gefunden werden, welcher der Gleichung

$$X = 0$$

Genüge thut, so weiss man, dass, wenn für x bereits zwei nur wenig von einander verschiedene Werthe a und b bekannt sind, für welche X zwei wenig von Null abweichende Werthe A und B erhält, die Differenzen zwischen a, b und dem gesuchten Werthe von x, welcher c heisse, den entsprechenden Differenzen zwischen A, B und 0 sehr nahe proportional sind, dass also sehr nahe

$$a - c : b - c : a - b = A : B : A - B, \text{ und damit}$$

$$(1) \qquad c = b + (b - a) \frac{B}{A - B} \quad \text{sein wird.}$$

Findet sich für den solchergestalt berechneten Werth c von x, X nicht $= 0$, sondern $= C$, so ist auf dieselbe Weise ein dem gesuchten bedeutend näher liegender Werth von x,

$$(2) \qquad d = c + (c - b) \frac{C}{B - C};$$

und auf gleiche Art, wenn für $x = d$, $X = D$ wird, ein abermals um einen Grad genauerer Werth von x,

$$(3) \qquad e = d + (d - c) \frac{D}{C - D};$$

u. s. w. Es lassen sich aber der vierte Näherungswerth d und die folgenden e, u. s. w. noch um ein Beträchtliches genauer, als durch die Formeln (2), (3) u. s. w., ermitteln. Denn da man,

wenn d berechnet werden soll, bereits drei Paare zusammengehöriger Werthe von x und X, nämlich a und A, b und B, c und C, kennt, so wird man d noch um einen guten Theil schärfer finden, wenn man bei seiner Berechnung nicht bloss das zweite und das dritte Paar, wie vorhin, sondern auch noch das erste mit berücksichtigt. Eben so wird man den fünften Näherungswerth e ungleich genauer, als durch (3), erhalten, wenn man, ausser d und D, c und C, auch noch das Paar b und B, oder selbst noch das Paar a und A, mit in Rechnung zieht, u. s. w.

Bemerkenswerth ist hierbei die sehr einfache Gestalt, auf welche sich die zu dieser schärfern Rechnung nöthigen Formeln bringen lassen. Bereits in der von mir im Jahre 1815 herausgegebenen Gelegenheitsschrift: *de computandis occultationibus fixarum per planetas,* Seite 15, habe ich diese einfachen Formeln zusammengestellt, und wenn ich mir jetzt erlaube auf sie zurückzukommen, so geschieht dieses besonders deshalb, weil sie an jenem Orte, wenigstens auf den ersten Blick, nicht die allgemeine Anwendbarkeit zu haben scheinen, deren sie doch fähig sind, und weil sie dort ohne ihre Entwickelung mitgetheilt sind, die ich aber jetzt beifügen werde.

Man betrachte, um zunächst den schärferen Werth von d zu ermitteln, umgekehrt x als eine Function von X, welche für $X = A, B, C$ resp. die Werthe a, b, c annimmt. Der irgend einem andern Werthe von X zukommende Werth von x ist alsdann nach der bekannten von Lagrange gegebenen Interpolationsformel:

$$x = a\frac{(X-B)(X-C)}{(A-B)(A-C)} + b\frac{(X-A)(X-C)}{(B-A)(B-C)} + c\frac{(X-A)(X-B)}{(C-A)(C-B)};$$

und daher, wenn man $X = 0$ setzt, als wofür $x = d$ werden soll:

$$(4)\qquad d = a\frac{BC}{(A-B)(A-C)} + b\frac{AC}{(B-A)(B-C)} + c\frac{AB}{(C-A)(C-B)}.$$

Es hat aber zwischen A, B, C die identische Gleichung statt:

$$(5)\qquad 1 = \frac{BC}{(A-B)(A-C)} + \frac{AC}{(B-A)(B-C)} + \frac{AB}{(C-A)(C-B)}.$$

Diese Gleichung, mit c multiplicirt und von (4) abgezogen, giebt die für die Berechnung von d etwas einfachere Formel:

$$(6)\qquad d = c + (a-c)\frac{BC}{(A-B)(A-C)} + (b-c)\frac{AC}{(B-A)(B-C)},$$

die sich aber noch mehr vereinfachen lässt, wenn man die zwischen a, b, c und A, B bereits obwaltende Relation (1) berücksichtigt. In der That reducirt sich mit dieser Gleichung, die sich auch also schreiben lässt:

$$(7) \qquad a - c = (b - c)\frac{A}{B},$$

die Gleichung (6) auf

$$d = c + (b - c)\,AC\left[\frac{1}{(A-B)(A-C)} + \frac{1}{(B-A)(B-C)}\right], \text{ d. i.}$$

$$(2^*) \qquad d = c + (c - b)\frac{C}{B-C}\cdot\frac{A}{A-C},$$

wegen der identischen Gleichung

$$\frac{1}{(A-B)(A-C)} + \frac{1}{(B-A)(B-C)} + \frac{1}{(C-A)(C-B)} = 0.$$

Wie man sieht, entsteht dieser genauere Werth von d aus dem früheren (2), wenn man das dortige zweite Glied von d noch mit dem Bruche $\frac{A}{A-C}$ multiplicirt, — einem Bruche, der, wegen der Kleinheit von C gegen A, von der Einheit nur wenig verschieden sein wird.

Aehnlicherweise erhält man als fünften Näherungswerth, wenn man dabei nächst den Paaren d und D, c und C noch das Paar b und B in Rechnung zieht:

$$(3^*) \qquad e = d + (d - c)\frac{D}{C-D}\cdot\frac{B}{B-D}.$$

Indessen wird dieser sich noch verschärfen lassen, wenn man auch noch das erste Paar a und A mit berücksichtigt, und es dürfte, wenn auch nicht der Praxis willen, doch in theoretischer Hinsicht der Mühe nicht unwerth sein, die deshalb erforderliche Rechnung noch anzustellen.

Zuerst folgt nach Lagrange aus den vier Paaren zusammengehöriger Werthe a und A, u. s. w. d und D für irgend ein fünftes x und X:

$$x = a\frac{(X-B)(X-C)(X-D)}{(A-B)(A-C)(A-D)} + \ldots + d\frac{(X-A)(X-B)(X-C)}{(D-A)(D-B)(D-C)};$$

mithin für $X = 0$:

$$(8) \quad e = -a\frac{BCD}{(A-B)(A-C)(A-D)} - \ldots - d\frac{ABC}{(D-A)(D-B)(D-C)}.$$

Setzt man hierin $a = b = c = d = e = 1$, so erhält man eine identische Gleichung zwischen A, B, C, D, und es kommt, wenn man dieselbe mit d multiplicirt und von (8) abzieht:

$$(9)\quad e = d - (a-d)\frac{BCD}{(A-B)(A-C)(A-D)} - (b-d)\frac{ACD}{(B-A)(B-C)(B-D)} - (c-d)\frac{ABD}{(C-A)(C-B)(C-D)}.$$

Auf ähnliche Art, wie vorhin, wollen wir nun hieraus mittelst der zwischen a, b, c, d bereits stattfindenden Relationen (4) und (2*) die Differenzen $a-d$ und $b-d$ eliminiren. – Von der Gleichung (4) die mit d multiplicirte Gleichung (5) abgezogen, bleibt:

$$0 = (a-d)\frac{BC}{(A-B)(A-C)} + (b-d)\frac{AC}{(B-A)(B-C)} + (c-d)\frac{AB}{(C-A)(C-B)},$$

und hiermit reducirt sich (9) auf

$$(10)\qquad e = d + (b-d)\frac{ACD}{(B-C)(A-D)(B-D)} - (c-d)\frac{ABD}{(B-C)(A-D)(C-D)}.$$

Ferner ist $b - d = b - c + c - d$

$= (c-d)\frac{(B-C)(A-C)}{CA} + c - d$, nach (2*), $= (c-d)\left[\frac{B}{C} - \frac{B-C}{A}\right]$;

und mit diesem Werthe von $b-d$ verwandelt sich (10) nach leichter Reduction in

$$(3^{**})\quad e = d + (d-c)\left[\frac{D}{C-D}\cdot\frac{B}{B-D}\cdot\frac{A}{A-D} + \frac{DC}{(B-D)(A-D)}\right],$$

welches die gesuchte Formel ist.

C. F. Naumann, *Versuch einer neuen Interpretation der Turmalin-Analysen.*

Die von Breithaupt schon lange aufgestellte Ansicht, dass innerhalb der Species Turmalin wohl eigentlich mehre, verschiedene Subspecies zu unterscheiden sein dürften, hat durch Rammelsbergs vortreffliche Untersuchungen eine gewisse Bestätigung gefunden, welche jenem ausgezeichneten Mineralogen zur grössten Genugthuung gereichen muss. Denn Rammelsberg zeigt, dass die Turmaline in 5 verschiedene Gruppen zerfallen, welchen eben so viele chemische Constitutionsformeln entspre-

chen, zwischen denen freilich ein gemeinsames chemisches Band vermisst wird.

Wie überraschend nun auch dieses Resultat erscheinen muss, so hat doch Rammelsberg selbst auf ein höchst merkwürdiges Verhältniss hingewiesen, welches in der Zusammensetzung aller von ihm*) analysirten Turmaline hervortritt, und sich in der That als das eigentliche Grundgesetz verkündet, welches die ganze Species in allen ihren Varietäten beherrscht.

»Nur unter einer Bedingung, sagt Rammelsberg,**) kann man für alle Turmaline ein gleichmässiges Resultat erhalten. Wenn man nämlich den Sauerstoff der Basen $\dot{R}$ und $\dddot{R}$ zu dem der Borsäure addirt, so verhält sich bei allen diese Summe zum Sauerstoff der Kieselsäure, wie 4 : 3. Allein, führt er fort, man kann aus dieser Thatsache nichts für die Constitution der Turmaline folgern.«

Sollte nun aber ein so durchgreifendes Gesetz wirklich zu keinen weiteren Folgerungen führen? Sollte jenes constante Verhältniss, welchem sich alle Turmaline fügen, einer jeden stöchiometrischen Bedeutung ermangeln? — Diese Fragen dürften sich wohl schon Manchem aufgedrängt haben. Das Folgende mag als ein Versuch zu ihrer Beantwortung betrachtet werden.

Zuvörderst müssen wir bemerken, dass das von Rammelsberg angeführte Verhältniss weit genauer stattfindet, als er es selbst erkannt zu haben scheint. Nimmt man nämlich auf den Fluorgehalt der Turmaline Rücksicht, und beachtet man den Umstand, dass dieses Fluor durch starkes Glühen als Fluorsilicium ausgetrieben wurde, so haben wir, in der gewiss erlaubten Voraussetzung, dass schon ursprünglich der ganze Fluorgehalt mit Silicium verbunden war, den bei jeder Analyse aufgeführten Betrag der Kieselsäure um so viel zu erhöhen, als es die dem Fluorgehalte entsprechende Sauerstoffmenge erfordert, welche letztere $= \frac{8}{19}$ des ersteren ist. Indem wir also diese, dem Fluor äquivalente Sauerstoffmenge zu dem Sauerstoff der Kieselsäure addiren, erhalten wir den corrigirten oder wahren Sauerstoffgehalt derselben. Addiren wir ferner die Sauerstoffmengen von $\dot{R}$, $\dddot{R}$ und $\dddot{B}$, und vergleichen wir endlich die so erhaltenen Zah-

*) Auch Hermanns Turmalin-Analysen lassen dieses Gesetz mit der grössten Bestimmtheit erkennen.

**) Poggend. Ann. B. 81, 1850, S. 30.

len mit einander, so tritt das von Rammelsberg erkannte Gesetz mit einer Schärfe hervor, welche nichts zu wünschen übrig lässt. Den Beweis dafür liefert die folgende Tafel, in welcher die analysirten Turmalin-Varietäten unter denselben fortlaufenden Nummern aufgeführt worden sind, wie in Rammelsbergs Abhandlung.

Varietät Nr.	Wahrer Sauerstoffgehalt der Kieselsäure.	Sauerstoffgehalt von $\dot{R}$, $\ddot{R}$ und $\dddot{B}$		Differenz.
		berechnet nach $\frac{4}{3}$.	gefunden.	
1	21,14	28,19	27,34	— 0,85
2	20,66	27,55	28,11	+ 0,56
3	20,71	27,61	27,40	— 0,21
4	20,97	27,96	28,09	+ 0,13
5	21,27	28,36	26,95	— 1,41
6	20,77	27,69	27,52	— 0,17
7	20,53	27,37	27,29	— 0,08
8	20,97	27,96	27,40	— 0,56
9	20,72	27,63	27,13	— 0,50
10	20,16	26,88	27,51	+ 0,63
11	20,06	26,75	27,15	+ 0,40
12	20,23	26,97	26,96	— 0,01
13	19,82	26,43	26,37	— 0,06
14	19,52	26,03	26,85	+ 0,82
15	19,85	26,47	26,50	+ 0,03
16	19,22	25,63	27,02	+ 1,39
17	19,66	26,21	26,13	— 0,07
18	19,73	26,31	26,33	+ 0,02
19	19,95	26,60	26,99	+ 0,39
20	20,77	27,69	26,87	— 0,82
21	20,64	27,52	26,04	— 1,48
22	19,91	26,55	26,77	+ 0,22
23	20,83	27,77	27,08	— 0,69
24	20,84	27,79	27,95	+ 0,16
25	20,91	27,88	27,00	— 0,88
26	21,80	29,06	26,27	— 2,79
27	21,40	28,55	28,04	— 0,51
28	21,00	28,00	28,49	+ 0,49
29	20,98	27,97	28,01	+ 0,04
30	22,52	30,03	26,90	— 3,13

Man sieht aus dieser Tafel, dass nur die Varietät Nr. 30 eine sehr bedeutende Differenz zwischen dem berechneten und dem gefundenen Sauerstoffgehalte giebt; allein Rammelsberg selbst hat diese Varietät von seinen Betrachtungen ausgeschlossen, weil sich solche höchst wahrscheinlich schon in einem Zustande der Zersetzung befand. Eben so zeigen die Varietäten Nr. 5, 16, 21 und 26 nicht ganz unerhebliche Differenzen, von denen jedoch wenigstens die drei ersteren das allgemeine Resultat nicht wesentlich beeinträchtigen dürften, wenn man bedenkt, mit welchen Schwierigkeiten die Analysen so vielfach und eigenthümlich zusammengesetzter Körper verbunden sind. Bei allen übrigen Varietäten aber sind die Differenzen so unbedeutend, ja zum Theil so verschwindend klein, dass an der naturgemässen Wahrheit des von Rammelsberg aufgefundenen Gesetzes durchaus nicht gezweifelt werden kann.*) Dass nun aber dieses

*) Welchen Einfluss es ausübt, je nachdem die corrigirten, oder die nicht corrigirten Sauerstoffwerthe der Kieselsäure in Rechnung gebracht werden, diess geht aus folgender Tafel hervor, in welcher, den Sauerstoffgehalt der Kieselsäure durchweg = 3 gesetzt, die Sauerstoffsummen von $\dot{R}$, $\dddot{R}$ und $\dddot{B}$ nach beiden Methoden ausgedrückt sind.

Varietät Nr.	Sauerst. von $\dot{R}$, $\dddot{R}$ u. $\dddot{B}$ bei nicht corrigirtem Sauerst. der Kieselerde.	Sauerst. von $\dot{R}$, $\dddot{R}$ u. $\dddot{B}$ bei corrigirtem Sauerst. der Kieselerde.	Varietät Nr.	Sauerst. von $\dot{R}$, $\dddot{R}$ u. $\dddot{B}$ bei nicht corrigirtem Sauerst. der Kieselerde.	Sauerst. von $\dot{R}$, $\dddot{R}$ u. $\dddot{B}$ bei corrigirtem Sauerst. der Kieselerde.
1	4,064	3,880	16	4,365	4,217*
2	4,263	4,082	17	4,132	3,987
3	4,183	3,969	18	4,147	4,003
4	4,231	4,018	19	4,184	4,059
5	3,989	3,801*	20	4,130	3,881
6	4,189	3,975	21	3,926	3,785*
7	4,179	3,988	22	4,211	4,034
8	4,114	3,920	23	4,095	3,900
9	4,123	3,928	24	4,192	4,013
10	4,281	4,094	25	4,044	3,874
11	4,211	4,060	26	3,767	3,599*
12	4,152	3,998	27	4,130	3,930
13	4,164	3,992	28	4,293	4,070
14	4,273	4,126	29	4,214	4,005
15	4,136	4,005	30	3,774	3,583*

Abstrahirt man von den 5 mit Sternen bezeichneten Zahlen, so schwanken die Werthe für die übrigen 25 Numern zwischen 3,874 und 4,126. Sehr

Gesetz aus Rammelsbergs Analysen mit solcher Präcision zu erkennen ist, diess verbürgt uns wiederum die grosse Genauigkeit derselben, und verpflichtet uns, es mit ihren Zahlen genau zu nehmen, und bei der Abrundung derselben zu einfacheren Verhältnissen kein zu leichtfertiges Spiel zu treiben.

Die nächste Folgerung, welche sich aus dem Rammelsbergschen Gesetze ergiebt, ist nun aber wohl die, dass die Borsäure in den Turmalinen gar nicht die Rolle einer Säure, sondern die Rolle einer Basis spielt; eine Folgerung, welche uns um so weniger überraschen kann, da Rammelsberg selbst gezeigt hat, wie dieselbe Deutung der Borsäure auch in einigen anderen Fällen zulässig ist. Die Borsäure der Turmaline scheint demnach mit den Basen $\dddot{R}$ vereinigt werden zu müssen. Zur Rechtfertigung dieser Ansicht mag darauf hingewiesen werden, dass auch die Zusammensetzung des Axinites mit überraschender Genauigkeit durch die sehr einfache Formel $4\dddot{R}\ddot{Si} + 5\dot{R}\ddot{Si}$ dargestellt wird, sobald man die Borsäure mit zu den Basen $\dddot{R}$ rechnet.*) Es dürfte daher keineswegs gewagt erscheinen, dasselbe Verfahren auch für die Turmaline geltend zu machen, in welchen sich ja ohnediess die Borsäure auf die Seite der Basen stellt, um mit ihnen gemeinschaftlich das Rammelsbergsche Gesetz zur Verwirklichung zu bringen.**)

Da die Basen $\dot{R}$ und $\dddot{R}$, wie wir später sehen werden, in äusserst verschiedenen Verhältnissen auftreten, so ist es wohl zweckmässig, für das in den Turmalinen dargestellte Doppelsalz einen Ausdruck von der Form:

$$m\dddot{R}\ddot{Si} + \dot{R}\ddot{Si}^{n}$$

---

auffallend ist es, dass bei nicht corrigirtem Sauerstoffgehalte der Kieselerde die Fehler (d. h. die Abweichungen von der Zahl 4) fast alle positiv ausfallen, mit Ausnahme von 4 Fällen, und dass es gerade diese 4 Fälle sind, welche auch bei corrigirtem Sauerstoffgehalte besonders fehlerhafte Resultate liefern. Diess lässt wohl mit Sicherheit schliessen, dass der Kieselsäuregehalt in den Analysen überall zu klein angegeben ist, weshalb denn die Correction desselben vollkommen gerechtfertigt erscheint.

*) Setzt man z. B. $4\dddot{R} = 2\dddot{Al} + \dddot{Fe} + \dddot{B}$, und $5\dot{R} = 4\frac{1}{2}\dot{Ca} + \frac{1}{2}\dot{Mg}$, so giebt diese Formel in 100 Theilen: 43,93 Kieselsäure, 16,29 Alumia, 12,68 Eisen- und Manganoxyd, 19,98 Kalkerde, 1,58 Magnesia und 5,54 Borsäure, in auffallender Uebereinstimmung mit Rammelsbergs Analysen.

**) Da die Krystallformen des Hydrargillites noch nicht sehr genau erforscht sind, so wäre es wohl möglich, dass sie mit denen des Sassolins isomorph befunden würden.

aufzustellen, in welchem m und n sehr verschiedene Werthe haben können. Diese generelle Formel muss nun aber, zufolge des Rammelsbergschen Grundgesetzes, in allen Turmalinen der Bedingungsgleichung:

$$3m + 1 : 2m + 2n = 4 : 3$$

Genüge leisten, welche sich auf die einfachere Form

$$m = 8n - 3$$

zurückführen lässt, weshalb denn $(8n - 3)\,\ddot{R}\ddot{Si} + \dot{R}\ddot{Si}^{n}$ das allgemeine Schema für die chemische Constitution der Turmaline sein würde.

Die einfachsten Folgerungen, welche sich aus der Bedingungsgleichung $m = 8n - 3$ ergeben, sind aber:

1) dass für $n = \frac{1}{2}$, $m = 1$, und
2) dass für $n = 1$, $m = 5$

wird, was den beiden speciellen Formeln

$$2\ddot{R}\ddot{Si} + \dot{R}^{2}\ddot{Si}$$
und $$5\ddot{R}\ddot{Si} + \dot{R}\ddot{Si}$$

entspricht, welche sich auch, um ein besseres Gleichgewicht der Massen herzustellen,

$$10\ddot{R}\ddot{Si} + 5\dot{R}^{2}\ddot{Si}$$
und $$10\ddot{R}\ddot{Si} + 2\dot{R}\ddot{Si}$$

schreiben lassen würden. Diese beiden Formeln dürften wohl als die beiden extremen, ja vielleicht als die beiden einzigen Formeln für die Zusammensetzung der Turmaline zu betrachten sein; sie werden mit der grössten Genauigkeit durch die von Rammelsberg analysirten Varietäten Nr. 1 und Nr. 28 repräsentirt.

Dass sich aus der generellen Formel $m\ddot{R}\ddot{Si} + \dot{R}\ddot{Si}^{n}$ noch mancherlei andere specielle Formeln ableiten lassen werden, welche alle dem Gesetze $m = 8n - 3$ genügen, diess bedarf kaum der Erwähnung; so wird z. B. für $n = \frac{3}{4}$, $m = 3$; für $n = \frac{2}{3}$, $m = \frac{7}{3}$. Um jedoch zu einer Entscheidung darüber zu gelangen, ob auch diese, oder ob irgend andere specielle Formeln wirklich zulässig sind, dazu ist es erforderlich, die Sauerstoffverhältnisse der Basen $\dot{R}$ und $\ddot{R}$ (einschliesslich der Borsäure) in sorgfältige Erwägung zu ziehen.

Setzen wir den Sauerstoff der Basen $\dot{R} = 1$, so ergeben sich in den 29 von Rammelsberg analysirten und berücksichtigten Varietäten folgende Sauerstoffmengen der Basen $\ddot{R}$, welche

wir nach ihren allmälig aufsteigenden Werthen geordnet haben, daher die Numern, unter welchen Rammelsberg die Varietäten aufführt, etwas ausser ihrer Ordnung erscheinen.

Varietät Nr.	Sauerstoffverhältniss von $\dot{R} : \ddot{R}$.	Einfacheres Verhältniss.
1	1 : 3,104	1 : 3
3	1 : 4,037	1 : 4
5	1 : 4,233	
2	1 : 4,344	
6	1 : 4,429	
4	1 : 4,721	
7	1 : 4,782	
13	1 : 4,808	
12	1 : 4,861	
10	1 : 4,980	1 : 5
8	1 : 5,213	
14	1 : 5,797	
9	1 : 5,851	
11	1 : 6,014	1 : 6
17	1 : 7,484	
16	1 : 7,497	
15	1 : 7,893	} 1 : 8
22	1 : 8,137	
18	1 : 8,403	
19	1 : 9,147	1 : 9
23	1 : 9,258	
25	1 : 9,714	
24	1 : 10,05	1 : 10
20	1 : 10,43	
26	1 : 11,33	
21	1 : 13,55	
28	1 : 15,08	
27	1 : 15,49	} 1 : 15
29	1 : 16,39	

Bei dem Vertrauen, auf welches Rammelsbergs Analysen so gerechten Anspruch haben, würde es gewiss unbesonnen sein, an diesen Zahlen viel zu mäkeln, um sie **alle** auf **einfachere** Verhältnisse zurückzuführen. Im Gegentheile müssen wir uns

möglichst an ihre Werthe halten, weil das Grundgesetz der Constitution aller Turmaline auf diesen Werthen beruht. Wir möchten uns kaum getrauen, bei anderen Varietäten eine solche Zurückführung vorzunehmen, als bei denjenigen, wo in vorstehender Tabelle die einfacheren Verhältnisse bereits daneben gesetzt worden sind, indem wir es nur da leichter nehmen zu dürfen glaubten, wo die Basen $\dot{R}$ in sehr geringer Quantität auftreten, und daher schon kleine Fehler der Analysen einen grossen Einfluss auf die Zahlenverhältnisse ausüben.

Wenn wir also berechtigt, ja, wenn wir verpflichtet sind, den vorstehenden Zahlenverhältnissen eine grosse Genauigkeit zuzuerkennen, so ergiebt sich, dass zwischen den beiden extremen Verhältnissen 1 : 3 und 1 : 15 eine grosse Menge von mittleren Verhältnissen vorkommt, welche zwar zum kleinern Theile durch einfache Zahlen ausgedrückt werden können, zum grössern Theile aber eine solche Reduction nicht zulassen. Den beiden extremen Verhältnissen 1 : 3 und 1 : 15 entsprechen aber die beiden oben aufgestellten speciellen Formeln $2\ddot{R}\ddot{S}i + \dot{R}^2\ddot{S}i$ und $5\ddot{R}\ddot{S}i + \dot{R}\ddot{S}i$.

Versuchen wir es nun, die den übrigen einfachen Zahlenverhältnissen entsprechende chemische Constitution, nach Anleitung der generellen Formel $m\ddot{R}\ddot{S}i + \dot{R}\ddot{S}i^n$, darzustellen, so erhalten wir, vermöge des Gesetzes $m = 8n - 3$,

für das Verhältniss 1 : 4, $m = \frac{4}{3}$ und $n = \frac{13}{24}$
,, ,, ,, ,, 1 : 5, $m = \frac{5}{3}$ und $n = \frac{7}{12}$
,, ,, ,, ,, 1 : 6, $m = 2$ und $n = \frac{5}{8}$
,, ,, ,, ,, 1 : 7, $m = \frac{7}{3}$ und $n = \frac{2}{3}$
,, ,, ,, ,, 1 : 8, $m = \frac{8}{3}$ und $n = \frac{17}{24}$
,, ,, ,, ,, 1 : 9, $m = 3$ und $n = \frac{3}{4}$
,, ,, ,, ,, 1 : 10, $m = \frac{10}{3}$ und $n = \frac{19}{24}$,

von welchen Zahlen doch in der That nur wenige zu ansprechenden Formeln führen würden.

Bedenkt man aber, wie zwischen diesen einfachen Verhältnissen noch so viele andere Verhältnisse liegen, dass es fast den Anschein gewinnt, als könnte zwischen 1 : 3 und 1 : 15 fast jedes beliebige mittlere Verhältniss vorkommen, so möchte man wohl den Gedanken aufgeben, für jede einzelne Turmalin-Varietät eine besondere Formel hinzustellen; vielmehr wird man es für zweckmässiger erachten, die Sache so aufzufassen, dass es zwei Normal-Varietäten des Turmalins, oder

zweierlei verschiedene Turmalin-Substanzen giebt, welche den Verhältnissen 1 : 3 und 1 : 15 entsprechen, und dass alle übrigen Varietäten als blosse Gemische dieser beiden Normal-Varietäten in schwankenden und unbestimmten Verhältnissen zu betrachten sind.

Nennen wir, der leichteren Uebersicht wegen,

die Turmalinsubstanz $2\dddot{R}\dddot{Si} + \dot{R}^2\dddot{Si} = t$

,, ,, ,, $5\dddot{R}\dddot{Si} + \dot{R}\dddot{Si} = t'$,

so stellen t und t' zwei, durch das Rammelsbergsche Gesetz auf das Innigste verschwisterte, und kraft desselben Gesetzes isomorphe Verbindungen dar, welche sich in ganz beliebigen Verhältnissen vermischen können, ohne dass dadurch weder dem Isomorphismus, noch auch jenem Gesetze der geringste Eintrag geschieht. Denn gesetzt, ein solches Gemisch bestehe aus $xt + yt'$, so wird in selbigem der Sauerstoffgehalt sämmtlicher Basen:

$$8x + 16y = 4(2x + 4y),$$

und der Sauerstoffgehalt der Kieselsäure:

$$6x + 12y = 3(2x + 4y),$$

also das Grundverhältniss 4 : 3 in keiner Weise alterirt, während sich das Sauerstoffverhältniss der Basen $\dot{R}$ und $\dddot{R}$ wie

$$2x + y : 6x + 15y$$

herausstellt. Setzt man dieses Verhältniss $= 1 : p$, was immer gestattet ist, so wird

$$(2p - 6)\,x = (15 - p)\,y,$$

woraus sich in jedem besonderen Falle die Zahlen x und y, d. h. die quantitativen Verhältnisse berechnen lassen, in welchen die erste Turmalinsubstanz und die zweite Turmalinsubstanz mit einander verbunden sind.

Für die von Rammelsberg analysirte Varietät Nr. 3 ist z. B. das Sauerstoffverhältniss der Basen $\dot{R}$ und $\dddot{R} = 1 : 4$; folglich wird

$$2x = 11y, \text{ oder}$$
$$x : y = 11 : 2,$$

und diese Varietät entspricht daher der Zusammensetzung $11t + 2t'$.

In der von Rammelsberg analysirten Varietät Nr. 10 ist das Sauerstoffverhältniss der beiderlei Basen $= 1 : 5$; folglich wird

$$4x = 10y, \text{ oder}$$
$$x : y = 5 : 2,$$

d. h. diese Varietät besteht aus $5t + 2t'$. Die Varietät, in welcher das Sauerstoffverhältniss der beiderlei Basen = 1 : 7 wäre, würde genau aus gleichen Antheilen beider Turmalinsubstanzen bestehen.

Natürlich kann bei diesen Betrachtungen die besondere qualitative Zusammensetzung nicht zugleich mit erfasst werden, weil solche von dem wechselnden Auftreten bald dieser bald jener isomorphen Bestandtheile abhängt, durch deren Verschiedenheiten sich auch die Differenzen des specifischen Gewichtes und mancher anderen physischen Eigenschaften hauptsächlich bestimmen. Die von Rammelsberg gebildeten 5 Gruppen beruhen theils auf wirklich stöchiometrischen, theils auf bloss qualitativen Verschiedenheiten der Zusammensetzung, und ihr Werth kann durch die hier versuchte Betrachtung in keiner Weise beeinträchtigt werden. Nur möchte eine scharfe Abgränzung dieser Gruppen, und eine gesonderte Darstellung derselben durch eben so viele stöchiometrische Formeln von unserem Gesichtspunkte aus nicht mit Consequenz durchzuführen sein. Da diese Gruppen mit auf die Sauerstoffverhältnisse der Basen $\dot{R}$ und $\ddot{R}$ gegründet wurden, welche (auch nach Ausschluss der Borsäure) ausserordentlich schwankend sind, so dürfte wohl der Zuverlässigkeit der Analysen zu nahe getreten werden, wenn man diese Verhältnisse insgesammt auf die einfachen Verhältnisse 1 : 3, 1 : 4, 1 : 6, 1 : 9 und 1 : 12 zurückzuführen versucht, indem man sich z. B. erlaubt, Verhältnisse wie 1 : 2,25 oder 1 : 3,34 = 1 : 3 zu setzen. So vortreffliche Analysen scheinen denn doch eine genauere Berücksichtigung ihrer Zahlen zu verdienen, als sie ihnen bei solchen Abrundungen zu Theil wird.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass die hier versuchte Interpretation der Turmalin-Analysen sehr nahe mit demjenigen Verhältnisse zusammenhängt, welches Hermann unter dem Namen der Heteromerie eingeführt hat. Denn in der That ist es eine Art von Heteromerie, welche für die meisten Turmaline besteht. Allein die beiden heteromeren und isomorphen Substanzen sind durch ein gemeinsames chemisches Grundgesetz an einander gekettet, und in unbestimmten Verhältnissen mit einander verbunden. In solcher Weise dürfte der Begriff der Heteromerie wohl auch bei manchen anderen Mineralspecies seine Verwirklichung gefunden

haben.*) Dass übrigens die Frage nach der eigentlichen Zusammensetzung der Kieselsäure auf eine, der hier befolgten Ansicht günstige Weise beantwortet wird, diess dürfte aus den für den Axinit und die Turmaline aufgestellten Formeln hinreichend hervorgehen.

---

*) Es scheint nämlich in allen Fällen der Heteromerie ein allgemeines stöchiometrisches Gesetz zu Grunde zu liegen, durch welches, wie in vorliegendem Falle durch das Rammelsbergsche Gesetz, die verschiedenen Formeln an einander gekettet sind. Diess dürfte sich z. B. für die Glimmer bestätigen. Setzt man nämlich

den Sauerstoff der Kieselsäure $= s$
,, ,, ,, der Basen $\dddot{\mathrm{R}}$ $= r$
,, ,, ,, der Basen $\dot{\mathrm{R}}$ $= \varrho$

so ist in den meisten Kali- und Lithionglimmern

$$s = r + 3\varrho,$$

worauf sich die generelle Formel $m\dddot{\mathrm{R}}\dddot{\mathrm{Si}} + \dot{\mathrm{R}}\dddot{\mathrm{Si}}^n$ gründen lässt, in welcher die beiden Zahlen m und n nach der Bedingungsgleichung $n = \frac{m+3}{2}$ von einander abhängig sind. Eben so gilt für die meisten Magnesiaglimmer das Gesetz $s = r + \varrho$.

SITZUNG AM 24. APRIL 1852.

F. Reich, *Ueber die Regenmenge zu Freiberg.*

In Lohrmann's Beiträgen zur Meteorologie des Königreichs Sachsen (11. Lief. der Mittheilungen des statistischen Vereins des K. S.) sind bereits die zu Freiberg gefallenen Regen- und Schneemengen für 8 Jahre vollständig, für ein 9tes aber unvollständig mitgetheilt worden. Diese Beobachtungen wurden seitdem ununterbrochen fortgesetzt, so dass ich jetzt die Resultate von 22 Jahren vorzulegen im Stande bin.

Der gebrauchte Regenmesser ist ein Trichter von Eisenblech mit gusseisernem, innen vertikalen, aussen zu einer obern scharfen Kante zugeschärften Rande von 1,7535 Par. Fuss Durchmesser, also 347,75 Par. Quadratzoll Fläche. Die gefallene Regen- oder Schneemenge wurde in einem untergestellten Blechgefäss aufgefangen und täglich nach Leipziger Gewicht bis zu einzelnen Quentchen gewogen, daraus aber die Regenhöhe nach Pariser Zollen berechnet. 1 Par. Zoll entspricht 1889 (genauer 1888,9) Quentchen, oder 1000 Quentchen entsprechen 0,529416 Par. Zoll.

Es wäre zweckmässiger gewesen, den obern Rand des Regenmessers wieder zu verengen, und es ist nicht zu leugnen, dass bei der gewählten Form bei Schneefall mit heftigem Winde in den Regenmesser gefallener Schnee zum Theil wieder herausgeweht, und daher die Menge zu gering gefunden wird.

In den ersten Jahren stand der Regenmesser auf einem Thurme der Freiberger Stadtmauer, seit dem 20. April 1839 befindet er sich auf der kleinen Plateform des neuen Bergakademiegebäudes, 64 Par. Fuss über dem Strassenpflaster. Diese hohe Stellung vermindert die Regenmenge bekanntlich etwas.

Höhe der wässrigen Niederschläge in Pariser Zollen,

Jahr.	Januar.		Februar.		März.		April.		Mai.		Juni.	
1830	0,5449	10	1,0450	12	2,6576	16	3,3242	15	2,8534	17	2,3131	16
1831	1,0035	16	0,5867	13	3,4113	23	1,4057	13	3,1443	15	3,7574	16
1832	2,1637	8	0,0953	1	0,9546	10	0,4130	7	2,4204	15	2,7694	16
1833	0,3585	10	0,5683	14	1,5460	16	1,8344	19	0,6285	6	2,2104	12
1834	3,8552	19	0,4627	6	3,0726	19	2,1775	18	1,9912	16	4,3076	12
1835	1,6996	14	0,7889	11	1,5514	18	1,8974	18	2,5582	18	0,6311	7
1836	1,7134	17	0,5242	18	1,1335	17	1,8088	18	2,6363	13	3,3896	18
1837	1,9866	19	1,4090	16	1,5779	18	1,7312	22	5,3277	21	2,1662	14
1838	0,8614	15	0,8450	12	1,9828	23	1,4692	21	4,6086	13	4,0935	16
1839	1,9891	26	1,8976	20	1,4681	19	1,0572	18	3,5402	20	2,4337	17
1840	2,0446	19	0,5633	13	1,2330	16	0,2266	7	2,3728	15	1,6470	15
1841	1,9334	22	0,3457	8	0,8550	16	0,9937	12	1,8334	12	6,7998	17
1842	0,5172	17	0,4389	9	2,6683	23	0,7184	11	0,6327	7	1,3934	15
1843	3,1506	18	0,5935	13	0,5644	10	1,8445	16	2,6984	16	5,4170	20
1844	1,1743	21	0,9175	21	1,5909	22	0,9789	9	1,7619	15	2,1314	10
1845	0,3976	7	1,8095	17	1,4766	23	1,5110	12	4,7944	23	2,4411	15
1846	2,2029	18	1,9340	22	1,5824	19	2,2453	15	1,3987	19	0,9900	11
1847	0,7523	13	1,4739	24	0,6724	14	1,0837	20	2,3146	14	2,0245	22
1848	0,2631	8	2,5343	15	1,0075	16	1,5771	14	1,0699	9	2,5370	18
1849	2,0356	16	1,6338	19	1,2537	17	1,8636	14	1,5210	15	0,9942	15
1850	1,4008	18	2,6826	19	0,7375	18	1,1150	13	3,5317	16	2,9282	16
1851	0,7422	15	0,6464	11	1,9281	18	3,5921	23	2,7789	20	2,2241	17
Summe	32,7905	346	23,7961	314	34,9256	391	34,8685	335	56,4172	335	59,5997	335
Mittel	1,4905	15,73	1,0816	14,27	1,5875	17,77	1,5849	15,23	2,5644	15,23	2,7091	15,23

und Anzahl der Regen- und Schneetage zu Freiberg.

Juli.		August.		September.		Oktober.		November.		December.		Jahr.	
3,4666	14	3,7133	14	2,8817	15	2,8605	16	1,5134	16	3,2787	16	30,4524	177
6,4727	17	3,8898	18	6,6189	18	0,8031	8	3,8506	24	0,7047	14	35,6487	195
5,2115	18	1,4239	14	1,7937	14	0,3966	6	2,1906	12	1,9763	18	21,8090	139
4,8268	23	4,2722	19	2,2661	15	0,5696	7	1,4757	15	4,1437	25	24,7002	181
5,7966	12	2,5328	13	1,0827	6	1,4687		1,1864	10	2,3938	19	30,3278	166
3,0586	10	1,3574	9	1,3182	8	1,9165	19	0,5463	11	1,9868	19	19,3104	162
1,1419	12	1,2621	15	2,3304	15	1,0139	17	3,0735	22	2,0136	26	22,0412	208
4,4222	14	1,2445	12	3,4712	17	1,8700	19	1,9201	22	2,4731	16	29,5997	210
4,7667	16	3,3575	22	1,3585	5	1,7164	20	1,2870	11	0,6824	13	27,0290	187
3,8346	14	1,3310	17	1,5088	12	0,6612	11	1,2420	12	2,1409	23	23,1044	209
2,3093	14	1,3241	13	1,9911	16	2,9070	22	2,1711	18	0,6650	9	19,4549	177
2,9478	16	2,6227	10	1,4601	7	1,5861	15	2,0234	17	1,2177	15	24,6188	167
1,5405	10	0,2970	3	2,7101	16	1,8811	16	1,4029	20	2,0854	16	16,2859	163
1,6221	19	1,4765	14	1,2600	10	3,3390	20	1,2288	13	1,5284	19	24,7232	188
2,8938	22	1,6650	24	1,1218	16	2,3067	17	2,6640	22	0,3362	9	19,5424	208
3,8690	14	1,3394	14	2,3665	13	1,6825	15	0,5532	12	2,3771	24	24,6179	189
4,2232	14	2,0716	12	1,1541	10	1,1282	13	1,2013	14	0,9551	23	21,0868	190
2,4914	13	1,6099	13	1,7624	13	1,4570	16	0,6861	8	0,5056	7	16,8338	177
1,4384	11	2,0187	22	2,1759	15	2,0684	15	1,8953	20	0,3325	8	18,9181	171
3,1410	16	1,1409	12	2,0991	12	1,5020	16	0,5898	13	2,4814	16	20,2561	181
2,4268	15	2,5740	15	1,4178	16	3,9558	22	3,0045	23	1,2934	11	27,0681	202
2,6598	16	1,7561	17	3,8060	24	1,2743	14	2,1351	20	0,8137	18	24,3568	213
74,5613	330	44,2804	322	47,9551	293	38,3646	340	37,8411	355	36,3855	364	521,7856	4060
3,3892	15,00	2,0128	14,64	2,1792	13,32	1,7438	15,45	1,7201	16,14	1,6539	16,55	23,7175	184,56

Es ergiebt sich aus diesen Beobachtungen, dass in den verschiedenen Jahren die Regenmenge des ganzen Jahres sowohl, als noch mehr die der einzelnen Monate grossen Schwankungen unterliegt. Indessen dürfte die Anzahl der Jahre hinreichen, richtige Mittelwerthe zu geben. Wir sehen, dass die Regenmenge von ihrem Minimum im Februar regelmässig zu ihrem Maximum im Juli steigt, um dann wieder zu sinken, wovon nur die zu kleine des August eine bedeutende, die ebenfalls zu kleine des April eine weniger erhebliche Ausnahme macht. — Die Anzahl der Regentage des ganzen Jahres schwankt zwischen engeren Grenzen (139 und 213), wogegen die der einzelnen Monate noch grössere Differenzen zeigt. — Der an Regen reichste Monat war der Juni 1841 mit 6,8 Par. Zoll, der ärmste der Februar 1832 mit noch nicht 0,1 P. Z. bei einem einzigen Regentage. Die grösste Anzahl von Regentagen in Einem Monat war 26 im December 1836 und im Januar 1839. 25 und 24 kommen mehrere Male vor. Im Mittel schwankt die Anzahl der Regentage in den verschiedenen Monaten wenig; der September hat die wenigsten mit 13,32, worauf Februar und August folgen, der März die meisten mit 17,77.

Die Menge des in Einem Tage gefallenen Regens, welche aus obiger Tabelle nicht zu ersehen ist, überstieg 1 P. Z. an folgenden Tagen: sie betrug

1,5099 P. Z.	am	23. Sept.	1830	1,4347 P. Z.	am	21. Juli	1837
1,1774 ,,	,,	27. Juli	1831	1,9948 ,,	,,	5. Sept.	1837
1,2615 ,,	,,	28. Juli	1831	1,2611 ,,	,,	8. Juli	1838
1,0779 ,,	,,	5. Aug.	1831	1,0843 ,,	,,	22. Mai	1840
1,0043 ,,	,,	12. Sept.	1831	2,1865 ,,	,,	8. Juni	1841
1,2605 ,,	,,	13. Sept.	1831	1,1774 ,,	,,	31. Dec.	1842
1,7788 ,,	,,	10. Juli	1833	1,1774 ,,	,,	25. Juli	1845
1,0165 ,,	,,	24. Juni	1834	1,4644 ,,	,,	18. Juli	1846
1,1764 ,,	,,	28. Juni	1834	1,0980 ,,	,,	8. Juni	1848
2,0584 ,,	,,	23. Juli	1834	1,3088 ,,	,,	29. Sept.	1848
1,1859 ,,	,,	17. Aug.	1834	1,0355 ,,	,,	18. Febr.	1850
1,2791 ,,	,,	29. Mai	1836	1,2770 ,,	,,	23. Mai	1850

Bei der Freiberger Wasserversorgung, dem grossartigen Complexe von Teichen, Gräben und anderen Anlagen, durch welchen dem Hauptheile des Freiberger Bergamtsrevieres der Zufluss von Aufschlagewassern so weit thunlich gesichert ist, wird der Wasserzufluss allwöchentlich gemessen. Kann der Na-

tur der Sache nach diese Messung auch nicht auf grosse Genauigkeit Anspruch machen, so werden doch ihre Resultate im Ganzen eine richtige Uebersicht der Wassermenge geben, die den verschiedenen Teichen zugeflossen ist, und es wird von Interesse sein, die nach obigen Messungen mit dem Regenmesser wirklich gefallenen Wassermengen mit denjenigen zu vergleichen, die in die Teiche gekommen sind. Die gefälligen Mittheilungen, welche mir von der Stollen- und Röschenverwaltung zu Freiberg gemacht wurden, setzen mich in den Stand, diese Vergleichung anzustellen. Das Areal des Sammelreviers der gesammten Wasserversorgung, d. h. die Oberfläche des Bodens, welcher sein Wasser den Teichen zusendet, beträgt nach einer Ausmessung auf einer Karte 982264900 Dresdner Quadratfuss = 1,43 geograph. Quadratmeilen. — Da 1 Par. Zoll = 0,095566 Dresdner Fuss, so beträgt 1 Par. Zoll Wasserhöhe auf der gesammten Oberfläche des Sammelreviers 93871120 Dresdn. Cubikfuss. Diese sind aber nach der hier gebräuchlichen Einheit von wöchentlichen Rad Wasser, welche 1008000 Dresd. Cubikfuss beträgt, so viel wie 93,1261 wöchentliche Rad. — In dieser Einheit sind die in den darüber geführten Tabellen aufgeführten Wasserzuflüsse angegeben. — Da diese Angaben wöchentlich geschehen und vierteljährlich summirt werden, so konnte die Vergleichung der Wasserzuflüsse mit den gefallenen Regenmengen nur vierteljährlich erfolgen, wobei es von untergeordnetem Belang ist, dass die Vierteljahre der Bergwerksrechnung mit den entsprechenden drei Monaten nicht ganz genau zusammenfallen.

In der folgenden Tabelle befinden sich für jedes Vierteljahr und eben so für das ganze Jahr vier Columnen, von welchen die erste die gemessene Regenmenge, die zweite die gemessenen Wasserzuflüsse der Wasserversorgung, die dritte die Anzahl von Rad Wassern Zufluss, welche auf 1 Par. Zoll Regenmenge erhalten wurde, und die vierte die Bruchtheile des von dem gefallenen Wasser aufgesammelten enthält.

Vergleichung

der zu Freiberg gefallenen Regenmenge mit den bei der Freiberger Wasserversorgung erhaltenen Zuflüssen.

Jahr.	1stes Quartal.				2tes Quartal.				3tes Quartal.				4tes Quartal.				Jahr.			
	Regenmenge. P. Z.	Wasserzuflüsse. Rad.	Zuflüsse auf 1 P. Z. Regen. Rad.	Von dem Regen kam in die Teiche.	Regenmenge. P. Z.	Wasserzuflüsse. Rad.	Zuflüsse auf 1 P. Z. Regen. Rad.	Von dem Regen kam in die Teiche.	Regenmenge. P. Z.	Wasserzuflüsse. Rad.	Zuflüsse auf 1 P. Z. Regen. Rad.	Von dem Regen kam in die Teiche.	Regenmenge. P. Z.	Wasserzuflüsse. Rad.	Zuflüsse auf 1 P. Z. Regen. Rad.	Von dem Regen kam in die Teiche.	Regenmenge. P. Z.	Wasserzuflüsse. Rad.	Zuflüsse auf 1 P. Z. Regen. Rad.	Von dem Regen kam in die Teiche.
1830	4,2475	388,0	91,35	0,981	8,4907	252,5	29,74	0,319	10,0616	157,3	15,63	0,168	7,6526	290,0	37,90	0,407	30,4524	1087,8	35,72	0,384
1831	5,0015	468,0	93,57	1,005	8,3074	190,2	22,90	0,246	16,9814	332,7	19,59	0,210	5,3584	393,8	73,49	0,790	35,6487	1384,7	38,84	0,417
1832	3,2136	177,1	55,11	0,592	5,6028	99,7	17,80	0,191	8,4291	183,7	21,79	0,234	4,5635	213,5	46,79	0,503	21,8090	674,0	30,90	0,331
1833	2,4728	240,6	97,30	1,045	4,6733	157,1	33,62	0,361	11,3651	334,7	29,45	0,316	6,1890	374,5	60,51	0,650	24,7002	1106,9	44,81	0,481
1834	7,3905	470,2	63,62	0,683	8,4763	249,6	29,45	0,316	9,4121	170,5	18,12	0,194	5,0489	113,3	22,44	0,241	30,3278	1003,6	33,09	0,355
1835	4,0399	382,7	94,73	1,017	5,0867	214,2	42,11	0,452	5,7342	51,1	8,91	0,096	4,4496	70,9	15,93	0,171	19,3104	718,9	37,23	0,400
1836	3,3711	324,9	96,38	1,035	7,8347	273,7	34,93	0,375	4,7344	97,5	20,57	0,221	6,1010	181,5	29,75	0,320	22,0412	877,6	39,82	0,428
1837	4,9735	279,5	56,20	0,603	9,2251	579,4	62,81	0,674	9,1379	185,5	20,30	0,218	6,2632	327,4	52,27	0,562	29,5997	1371,8	46,35	0,498

1838	3,6892	267,8	72,59	0,779	10,1713	328,4	32,29	0,347	9,4827	219,0	23,10	0,248	3,6858	158,0	42,87	0,460	27,0290	973,2	36,01	0,387
1839	5,3548	390,5	72,93	0,783	7,0311	668,2	95,04	1,021	6,6744	175,8	26,34	0,283	4,0441	118,4	29,28	0,314	23,1044	1352,9	58,56	0,629
1840	3,8409	295,6	76,96	0,826	4,2464	259,4	61,06	0,656	5,6245	92,4	16,43	0,176	5,7431	296,1	51,56	0,554	19,4549	943,5	48,50	0,521
1841	3,1341	381,0	120,62	1,295	9,6269	260,3	27,03	0,290	7,0306	191,6	27,25	0,293	4,8272	197,7	40,96	0,440	24,6188	1010,6	41,05	0,441
1842	3,6244	316,4	87,30	0,937	2,7445	172,4	62,82	0,675	4,5476	61,4	13,50	0,145	5,3694	152,0	28,31	0,304	16,2859	702,2	43,12	0,463
1843	4,3085	490,1	113,75	1,221	9,9599	270,3	27,14	0,291	4,3586	219,5	50,36	0,541	6,0962	378,3	62,06	0,666	24,7232	1358,2	54,94	0,590
1844	3,6827	226,7	61,56	0,661	4,8722	419,3	86,06	0,924	5,6806	118,8	20,91	0,225	5,3069	164,6	31,02	0,333	19,5424	929,4	47,56	0,511
1845	3,6837	101,3	27,50	0,296	8,7465	597,3	68,29	0,733	7,5749	135,3	17,86	0,192	4,6128	229,3	49,69	0,534	24,6179	1063,2	43,19	0,464
1846	5,7193	603,2	105,47	1,133	4,6340	211,4	45,62	0,490	7,4489	168,0	22,55	0,242	3,2846	169,4	51,57	0,554	21,0868	1152,0	54,63	0,587
1847	2,8986	345,7	119,27	1,281	5,4228	277,5	51,17	0,550	5,8637	149,3	25,46	0,273	2,6487	228,0	86,28	0,926	16,8338	1000,5	59,44	0,638
1848	3,8049	276,9	72,78	0,782	5,1840	126,7	24,44	0,262	5,6330	57,3	10,17	0,109	4,2962	159,4	37,10	0,398	18,9181	620,3	32,80	0,352
1849	4,9231	469,0	95,27	1,023	4,3788	307,0	70,11	0,753	6,3810	106,5	16,79	0,179	4,5732	190,6	41,68	0,447	20,2561	1073,1	52,98	0,569
1850	4,8209	589,1	122,20	1,312	7,5749	306,9	40,52	0,435	6,4186	130,7	20,36	0,219	8,2537	376,3	45,59	0,489	27,0681	1403,0	51,83	0,557
1851	3,3167	306,0	92,26	0,991	8,5951	411,9	47,92	0,515	8,2219	240,6	29,26	0,314	4,2231	398,6	94,39	1,014	24,3568	1357,1	55,72	0,598
Summe 22 Jahre	91,5122	7770,3			150,8854	6633,4			166,7968	3579,2			112,5912	5181,6			521,7856	23164,5		
Mittel	4,1596	353,2	84,91	0,912	6,8584	301,5	43,96	0,472	7,5817	162,7	21,46	0,230	5,1178	235,5	46,02	0,494	23,7175	1052,9	44,39	0,477

Nach dieser Zusammenstellung ergiebt sich, dass 10 Mal im ersten, 1 Mal im zweiten und 1 Mal im vierten Quartale mehr Wasser in den Teichen aufgefangen wurde, als überhaupt fiel. Es erklärt sich dieses paradoxe Resultat vorzüglich aus dem Schmelzen des Schnees, der von früher her lag. So trat z. B. im Jahre 1839 die Frühjahrsthaufluth erst im April ein. Aehnlich verhielt es sich im Jahre 1844. Zufällig kann auch in dem einen oder andern Vierteljahre verhältnissmässig mehr Wasser in dem Sammelreviere gefallen sein, als zu Freiberg. — Ferner ist zu berücksichtigen (siehe oben), dass, wenn viel Schnee bei Kälte und starkem Winde fällt, der Schnee zum Theil aus dem Regenmesser wieder herausgeweht wird, und dieser daher zu geringe Angaben macht. — Endlich dürfte die Regenmenge zu Freiberg überhaupt weniger betragen, als in dem Sammelrevier der Wasserversorgung, einmal weil letztere höher im Gebirge liegt, wo die Regenmenge grösser ist (vergl. Lohrmann a. a. O.), dann weil der Regenmesser 64 Par. Fuss über der Oberfläche steht. Aus den letzteren Gründen ist die Mittelzahl (0,477) mit einem constanten Fehler behaftet, und man würde das Verhältniss des aufgefangenen Wassers zu dem gefallenen ohne Zweifel geringer gefunden haben, wenn man einen Regenmesser in der Mitte des Sammelreviers selbst an der Bodenoberfläche beobachtet hätte.

Nimmt man das Mittel aus den ersten und letzten eilf Jahren, so erhält man für jenes 0,435, für dieses 0,526, wonach sich die Menge des aufgefangenen Wassers in neuerer Zeit beträchtlich verhältnissmässig zur gefallenen Regenmenge vermehrt hat. Diess kann seinen Grund in den fortwährenden Verbesserungen haben, die man bei den Vorrichtungen zum Ansammeln des Wassers und zu Verhütung jeden Verlustes angebracht hat. Einfluss darauf kann aber auch die seit 1839 veränderte, und zwar erhöhte Aufstellung des Regenmessers haben.

Dass in dem ersten kalten Vierteljahre am meisten, im dritten warmen am wenigsten Wasser in die Teiche kam, ist leicht erklärlich; es tritt dieser Unterschied so stark hervor, dass im ersten Vierteljahre die Regenmenge ihren kleinsten, die Wasserzuflüsse ihren grössten, — dagegen im dritten Vierteljahre jene ihren grössten, diese ihren kleinsten Werth zeigen.

Das Verhältniss des aufgefangenen Wassers zu dem herabgefallenen schwankt in den einzelnen Quartalen für verschiedene Jahre sehr stark; in dem ganzen Jahre ist die Schwankung we-

niger gross. Mit Berücksichtigung der oben angedeuteten constanten Fehlerquellen kann man annehmen, dass von der vom Himmel fallenden Wassermenge sich 0,4 aufsammeln lassen.

Lehmann, *über die Krystallisirbarkeit eines der Hauptbestandtheile der Blutkörperchen.*

Da ich mich nie davon überzeugen konnte, dass die eiweissartigen Stoffe zur Krystallisation absolut unfähig seien, habe ich mich namentlich in der Hoffnung, dadurch den Weg zu einer genauern Kenntniss jener chemisch noch so räthselhaften Stoffe zu bahnen, seit längerer Zeit mit Versuchen über diesen Gegenstand beschäftigt; trotz zahlloser vergeblicher Experimente bin ich damit doch nicht unglücklich gewesen und hoffe darüber der Classe nächstens ausführlichere Mittheilung zu machen. Für heute erlaube ich mir, nur über einige von mir und einigen meiner Schüler am Blute gemachten Beobachtungen zu referiren. Dr. Funke machte zuerst bei Gelegenheit der Untersuchung des Milzvenenblutes vom Pferde die Erfahrung, dass dieses Blut unter dem Deckplättchen beim allmähligen Eintrocknen während der mikroskopischen Beobachtung sich fast vollständig in prismatische Krystalle verwandle; später wurde auch gefunden, dass das Blut vieler Süsswasserfische krystallisationsfähig sei. Funke hat hierüber seine Beobachtungen in Henle's und Pfeuffer's Zeitschrift für rat. Med. publicirt. Ich überzeugte mich, dass auch das Pfortaderblut der Pferde ganz ähnliche prismatische Krystalle liefert, wie das Milzvenenblut. Dr. Zänker in Dresden fand, dass in einem Falle von Leuchämie (Leucithämie) bei enorm vergrösserter Milz das Gesammtblut ganz in derselben Weise krystallisirbar war, wie sonst nur das Milzvenen- und Pfortaderblut. Dr. Kunde aus Berlin sah das Gesammtblut kranker so wie gesunder Hunde ebenfalls prismatisch krystallisiren.

Die bekannte Entdeckung Reichert's (Müller's Arch.), wornach auf der Decidua trächtiger Meerschweinchen tetraedrische Proteinkrystalle vorkommen sollen, leitete mich auf den Gedan-

ken, dass diese Krystalle mit unsern Blutkrystallen nahe verwandt sein möchten, und in der That fand ich auf der Decidua solcher Thiere tetraedrische Krystalle, wie sie auch Kunde aus dem Gesammtblute der Meerschweinchen erhielt; andre als diese Bluttetraeder habe ich auf der Decidua jener Thiere nicht gefunden. Ich fand auch das Blut der Mäuse und Kunde das der Ratten in Tetraedern krystallisirend; Letzterer entdeckte aber die eleganteste Krystallisation im Blute der Eichhörnchen; dasselbe liefert nämlich die schönsten und grössten sechsseitigen Tafeln (dem hexagonalen Systeme nicht angehörend); zuweilen sah ich auch wohl ausgebildete, sechsseitige, rechtwinklig abgestumpfte Säulen.

Es war glaublich, dass vielleicht das Pfortader- und Milzvenenblut dieser Thiere in Prismen krystallisirte, allein immer fand ich, dass das Pfortaderblut derjenigen Thiere, deren Gesammtblut krystallisirbar war, auch dieselben Formen wie das letztere zeigte. Das Pfortaderblut ist aber durchschnittlich minder geneigt zur Krystallisation, als das Blut aus andern Venen, sauerstoffreiches (künstlich mit Sauerstoff imprägnirtes) dazu geneigter, als kohlensäurereiches. Blut von Vögeln habe ich mehrfach modificirter Versuche ungeachtet nicht zur Krystallisation disponiren können, und zwar ebensowenig, als das Gesammtblut des Menschen, Pferdes, Rindes, Kalbs u. s. w.

So interessant diese Beobachtungen an sich scheinen mögen, o war damit doch eigentlich nicht viel gewonnen, da man eben nur unter dem Deckblättchen jene Krystallisation erzeugen konnte. Es war leicht ersichtlich, dass zur Erlangung solcher Krystalle eine höchst allmählige Verdunstung einzuleiten sei. Ich construirte daher verschiedene Apparate, durch welche man die Leitung der Verdunstung in seine Gewalt bekam; dabei ist aber ein wesentliches Beförderungsmittel der Krystallisation die Zerstörung der Blutkörperchen; denn dass deren Inhalt das Krystallgebende ist, davon überzeugt man sich schon durch die mikroskopische Beobachtung sehr leicht (das Serum krystallisirt niemals, selbst wenn es eine nicht unerhebliche Menge Blutzellen enthält). Wenn aber auch die Blutkörperchen nicht vollkommen zerstört zu werden brauchen, so müssen doch zur Herstellung jener Krystalle lebhafte endosmotische Strömungen zwischen Blutzelleninhalt und umgebender Flüssigkeit eingeleitet werden. Letztere bewerkstelligt man durch Wasser, besser noch durch etwas Aether oder

Spiritus, am besten aber durch Wasser und Aether. So gemischtes Blut oder Blutkuchenflüssigkeit wurde in einen Glascylinder gebracht, der auf der einen Seite mit Kaoutchouk, auf der andern mit Blase verschlossen war; durch das Kaoutchouk liess ich aus wässrigem Spiritus so lange von demselben zutreten, bis das Blut sich zu trüben anfing; dann wurde der Apparat einer Temperatur von 15 bis 20° C. ausgesetzt; während nun Wasser durch die Blase und Alkohol durch das Kaoutchoukplättchen abdunstete, bildeten sich die schönsten Krystalle (beim Meerschweinchenblute bis zu 3/4''' Durchmesser). Indessen bedarf es oft nur einer auf einer Seite mit Blase verschlossenen Endosmometerröhre, deren andre Oeffnung mit einem von einer Capillarröhre durchbohrten Kork versehen ist. Mit Wasser ausgelaugter Blutkuchen liefert selbst nach der zweiten und dritten Auslaugung noch schöne Krystalle.

Die tetraedrischen Krystalle des Meerschweinchenblutes sind in Wasser sehr schwerlöslich; trotz dieser Eigenschaft bildet das Reindarstellen des krystallisirbaren Stoffs mancherlei Schwierigkeiten. Bis jetzt habe ich folgende als die zweckmässigste Methode befunden: die gesammelten Krystalle werden mit Wasser wiederholt geschlämmt, wodurch ein grosser Theil der Hüllen der Blutkörperchen und andrer neben den Hüllen ausgeschiedener Molecüle entfernt wird: allein die klebrigen Hüllen der Blutzellen haften nicht blos an den Krystallen, sondern sind auch von diesen eingeschlossen; daher sind die Krystalle in Wasser von 35 bis 50° zu lösen und zu filtriren; bei dieser Temperatur geht die Flüssigkeit sehr leicht durch das Filter; selbst ziemlich concentrirte Blutkörperchenlösung wird auf diese Weise leicht filtrirbar und von jenen Hüllenmembranen befreit. Das Umkrystallisiren geht übrigens nicht so leicht von Statten, als man vielleicht erwarten könnte; das Fehlen der Blutkörperchenhüllen, die der Krystallisation als Ansatzpunkte dienen, mag daran schuld sein.

Obgleich ich bereits mit den reineren Krystallen einige analytische Versuche angestellt habe, so ziehe ich doch vor, deren Mittheilung auf eine spätere Zeit zu verschieben, wo ich mit grösseren Mengen und reinerem Material gearbeitet haben werde. Für jetzt nur soviel, dass die Krystalle eine sehr grosse Menge Hydratwasser enthalten und an der Luft sehr schnell verwittern; das Verwittern geschieht aber nicht, indem die Krystalle un-

durchsichtig werden und zu Pulver zerfallen, sondern indem sie rissig werden und dann unregelmässige, hornartig erscheinende Stückchen von muschlichem Bruch bilden. Ihre Lösung gerinnt zwischen 62 und 69° C., nicht durch Essigsäure, wohl aber durch Alkohol, Mineralsäuren und alle andern Agentien, durch welche lösliche Proteinkörper sonst präcipitirt zu werden pflegen.

Die Krystalle bestehen aus einem eiweissartigen Stoffe, welcher getrocknet im Mittel dreier Bestimmungen 0,788 % eisenhaltiger Asche enthält.

SITZUNG AM 16. OCTOBER 1852.

O. Schlömilch, *Ueber die Auflösung von Funktionsgleichungen.*

Die Bestimmung der Natur einer unbekannten Funktion aus einer ihrer charakteristischen Eigenschaften ist eines von den Problemen, für welches noch keine durchgreifende Behandlungsweise bekannt zu sein scheint. Man hat zwar eine Partie derartiger Aufgaben gelöst, namentlich die vier Gleichungen:

$$f(x) + f(y) = f(x+y)\,, \quad f(x) \,.\, f(y) = f(x+y)$$
$$f(x) + f(y) = f(x \,.\, y)\,, \quad f(x) \,.\, f(y) = f(x \,.\, y)$$

bei näherer Ansicht findet man aber bald, dass die dort angewandte Methode nicht weit reicht; in der That wird die Sache schon bei der nächsten Gleichung, welche Cauchy in derselben Weise behandelt hat, nämlich

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y)$$

etwas unsicher, wenigstens würde wohl schwerlich Jemand auf die Betrachtungen in § 2, Cap. V (S. 113) des *Cours d'Analyse* gekommen sein, der nicht vorher wusste, dass $f(x) = \cos ax$ und $f(x) = \frac{1}{2}(A^x + A^{-x})$ die gesuchten Funktionen sind. Vielleicht wird man desshalb ein Verfahren, das nicht leicht versagen dürfte, nicht ungern sehen, wenn es auch weniger elementar als das bisherige sein sollte. Es besteht, in kürzester Form ausgedrückt, darin, die gegebene Funktionsgleichung in eine Differenzialgleichung umzusetzen und letztere zu integriren. Eine allgemeine Regel für diese Umwandlung lässt sich bei der Unendlichkeit verschiedener Formen, welche die Funktionsgleichungen

darbieten können, begreiflicherweise nicht geben, doch verdient bemerkt zu werden, dass die bekannten Sätze:

$$\operatorname{Lim} \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} = f''(x)$$

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \tfrac{1}{2} h^2 f''(x+\Theta h)$$

$$[1 > \Theta > 0]$$

meistentheils gute Dienste leisten. Das Nähere werden die nachstehenden theils bekannten theils neuen Beispiele hinreichend zeigen.

I.

Wir betrachten zunächst die Gleichung

$$1)\qquad f(x_1+x_2) + f(x_1-x_2) = \mu f(x_1)\,f(x_2)$$

welche etwas allgemeiner als die vorhin erwähnte ist. Für $x_2 = 0$ folgt zunächst

$$2)\qquad 2f(x_1) = \mu f(x_1)\,f(0) \text{ oder } f(0) = \frac{2}{\mu}$$

Nehmen wir ferner $x_1 = x + \delta$, $x_2 = \delta$, wodurch die Gleichung 1) in die folgende übergeht

$$f(x+2\delta) + f(x) = \mu f(x+\delta)\,f(\delta),$$

subtrahiren noch beiderseits $2f(x+\delta)$ und dividiren mit δ^2, so ist

$$\frac{f(x+2\delta) - 2f(x+\delta) + f(x)}{\delta^2} = \frac{\mu f(\delta) - 2}{\delta^2}\, f(x+\delta)$$

Bei verschwindenden δ geht die linke Seite in $f''(x)$ über; rechter Hand stellt sich der erste Faktor unter die Form $\frac{0}{0}$, sobald man die Gleichung 2) beachtet; bezeichnen wir den wahren Werth dieses unbestimmten Symboles mit k, so haben wir

$$3)\qquad f''(x) = k f(x)$$

also eine gewöhnliche lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Ihr vollständiges Integral ist bekanntlich

$$4)\qquad f(x) = Ae^{x\sqrt{k}} + Be^{-x\sqrt{k}}$$

wo A und B die willkührlichen Constanten bedeuten. Um diese zu bestimmen hat man nur nöthig, den für $f(x)$ gefundenen Ausdruck in die ursprüngliche Gleichung 1) zu substituiren und die zu denselben Exponenzialgrössen gehörenden Coefficienten zu vergleichen. Man findet auf der Stelle, dass A und B den

gemeinschaftlichen Werth $\frac{1}{\mu}$ besitzen müssen, während k völlig willkührlich bleibt; die fertige Auflösung ist demnach:

5) $$f(x) = \frac{1}{\mu}(e^{x\sqrt{k}} + e^{-x\sqrt{k}})$$

hinsichtlich des beliebigen k lassen sich die drei Fälle $k > 0$, $k < 0$ und $k = 0$ unterscheiden; im ersten Falle wird $\sqrt{k}$ reell, und wenn $e^{\sqrt{k}}$ mit a bezeichnet wird

6) $$f(x) = \frac{1}{\mu}(a^x + a^{-x})$$

im zweiten Falle ist $\sqrt{k} = b\sqrt{-1}$ zu setzen und man hat dann

7) $$f(x) = \frac{2}{\mu}\cos bx$$

Im dritten Falle giebt die Formel 4) nicht mehr das allgemeine Integral der Differenzialgleichung 3); aus $f''(x) = 0$ folgt dann unmittelbar

8) $$f(x) = C + C'x$$

wo C und C' die beiden Integrationsconstanten sind. Durch Substitution von diesem Werthe in No. 1) findet man leicht $C = \frac{2}{\mu}$, $C' = 0$, mithin dasselbe, als wenn in No. 6) $a = 1$ gesetzt worden wäre. Der spezielle Fall $k = 0$ giebt also nichts Neues, durfte jedoch nicht übersehen werden, da er bei anderen Funktionsgleichungen, welche auf dieselbe Differenzialgleichung führen, eine partikuläre Lösung liefern kann (vergl. No. II).

Hiermit wäre zugleich eine Lücke in Poisson's Mechanik ausgefüllt; auf die Gleichung

$$\varphi(x+z) + \varphi(x-z) = \varphi(x)\,\varphi(z)$$

ist nämlich daselbst ein Beweis des Kräfteparallelogrammes gegründet, aber ohne Angabe über die Auflösung der Gleichung. In der ersten Auflage findet sich zwar eine derartige Lösung, die jedoch von der Voraussetzung ausgeht, dass $\varphi(x)$ in eine Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 +$ etc. verwandelbar sei. Das Ungenügende einer solchen Hypothese mag Poisson selbst gefühlt haben, denn diese Ableitung fehlt in der zweiten Ausgabe und ist daselbst durch die einfache Bemerkung ersetzt, dass die fragliche Gleichung durch $\varphi(x) = \cos bx$ befriedigt werde; für ein Lehrbuch der Mechanik mochte diese Angabe hinreichen, für die Analysis aber entspringt daraus die Aufgabe, die Herleitung der Auflösung nachzuweisen.

II.

Als zweites Beispiel diene die Bestimmung derjenigen ebenen Curve, in welcher die Summe zweier Ordinaten zu der in der Mitte zwischen beiden eingeschalteten Ordinate in einem so lange constanten Verhältnisse bleibt, als die gegenseitigen Abstände der drei Ordinaten nicht geändert werden. Nennen wir $y = f(x)$ die Gleichung der krummen Linie, so muss der Quotient

$$\frac{f(x+h) + f(x-h)}{f(x)}$$

von x unabhängig also eine blosse Funktion von h sein, die $\psi(h)$ heissen möge. Aus der Gleichung

$$9) \qquad \frac{f(x+h) + f(x-h)}{f(x)} = \psi(h)$$

folgt zunächst für $h = 0$

$$10) \qquad \psi(0) = 2$$

Ersetzen wir ferner x durch $x + \delta$ und h durch δ, so kann man aus der nunmehrigen Gleichung

$$f(x+2\delta) + f(x) = \psi(\delta)\, f(x+\delta)$$

leicht die folgende ableiten

$$\frac{f(x+2\delta) - 2f(x+\delta) + f(x)}{\delta^2} = \frac{\psi(\delta) - 2}{\delta^2}\, f(x+\delta)$$

Für $\delta = 0$ stellt sich der erste Faktor rechter Hand unter die vieldeutige Form $\frac{0}{0}$, deren Betrag k heissen möge; man gelangt so zu der Differenzialgleichung

$$f''(x) = k f(x)$$

welche mit der früher betrachteten Gleichung 3) identisch ist. Man hat demnach entweder

$$f(x) = Ae^{x\sqrt{k}} + Be^{-x\sqrt{k}} \qquad \text{für } k \gtrless 0$$

oder

$$f(x) = C + C'x \qquad \text{für } k = 0$$

und wenn man diese Werthe in die ursprüngliche Gleichung substituirt, so findet sich, dass $B = A$ sein muss, während k, C und C' beliebig bleiben. Durch Unterscheidung der Fälle $k > 1$ und $k < 1$ erhält man demnach

11) $$\begin{cases} y = A(a^x + a^{-x}) \\ y = A\cos bx \\ y = C + C'x \end{cases}$$

als Gleichungen der drei verschiedenen Curven, welche der Aufgabe genügen.

III.

Nicht ohne Interesse ist die Frage nach den krummen Linien, deren Ordinaten in harmonischer Proportion stehen, sobald die zugehörigen Abscissen eine arithmetische Proportion bilden. Nennen wir x_1 und x_2 ein paar beliebige Abscissen, $f(x_1)$ und $f(x_2)$ die entsprechenden Ordinaten, so würde der Aufgabe zufolge die zu $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ gehörende Ordinate das harmonische Mittel aus $f(x_1)$ und $f(x_2)$ sein müssen; diess giebt die Funktionsgleichnng:

12) $$\frac{2f(x_1) \cdot f(x_2)}{f(x_1) + f(x_2)} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

oder umgekehrt

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{f(x_2)} + \frac{1}{f(x_1)}\right] = \frac{1}{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}$$

Bezeichnen wir $\frac{1}{f(x)}$ mit $\varphi(x)$ und setzen $x_1 = x$, $x_2 = x + 2\delta$, so wird hieraus

$$\varphi(x + 2\delta) + \varphi(x) = 2\varphi(x + \delta)$$

oder

$$\frac{\varphi(x + 2\delta) - 2\varphi(x + \delta) + \varphi(x)}{\delta^2} = 0$$

Für verschwindende δ geht diese Gleichung in die sehr einfache Differenzialgleichung über

$$\varphi''(x) = 0$$

deren Integral $\varphi(x) = \alpha + \beta x$ ist; man hat daher

$$f(x) = \frac{1}{\alpha + \beta x}$$

Will man die Gleichung homogen machen, so dass die darin vorkommenden Constanten Linien bedeuten wie x selbst, so setze man $\alpha = \frac{h}{k^2}$, $\beta = \frac{1}{k^2}$ und es lautet dann die Gleichung der Curve

13) $$y = \frac{k^2}{x+h}$$

letztere ist also eine gleichseitige Hyperbel, bei welcher die eine Asymptote als Abscissenachse und eine beliebige Parallele zur anderen Asymptote als Ordinatenachse dient.

IV.

Eine ähnliche Aufgabe entspringt aus der Frage nach den Curven, in welchen die Ordinaten eine geometrische Proportion bilden, sobald die entsprechenden Abscissen in harmonischer Proportion stehen. Bei zwei Abscissen x_1 und x_2, denen die Ordinaten $f(x_1)$ und $f(x_2)$ entsprechen mögen, wäre jetzt $\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}$ die mittlere harmonische Abscisse, zu welcher die Ordinate $\sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$ gehören müsste. Die Funktionsgleichung ist daher

14) $$\sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)} = f\left(\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)$$

sie gestaltet sich besser, wenn man setzt

15) $$f(x) = A^{\varphi(x)}$$

es wird nämlich

$$\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2} = \varphi\left(\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)$$

und mittelst der Substitutionen $x_1 = x$, $x_2 = x + 2\delta$

$$\varphi(x) + \varphi(x + 2\delta) = 2\varphi\left(x + \frac{x\delta}{x+\delta}\right)$$

Wendet man auf das zweite Glied linker Hand, sowie auf die rechts stehende Funktion den bis zum zweiten Gliede genommenen Taylor'schen Satz an, so ist

$$\varphi(x) + \varphi(x) + 2\delta\,\varphi'(x) + 2\delta^2\,\varphi''(x + 2\Theta\delta)$$
$$= 2\varphi(x) + 2\,\frac{x\delta}{x+\delta}\,\varphi'(x) + \left(\frac{x\delta}{x+\delta}\right)^2 \varphi''\left(x + \frac{\Theta_1\, x\delta}{x+\delta}\right),$$

Nach Vereinigung der gleichartigen Glieder lässt sich die Gleichung mit δ^2 heben und giebt

$$\frac{2}{x+\delta}\,\varphi'(x) + 2\varphi''(x + 2\Theta\delta) = \left(\frac{x}{x+\delta}\right)^2 \varphi''\left(x + \frac{\Theta_1\, x\delta}{x+\delta}\right)$$

woraus für $\delta = 0$ folgt:

$$\frac{2}{x}\varphi'(x) + 2\varphi''(x) = \varphi''(x)$$

oder

$$\varphi''(x) = -\frac{2}{x}\varphi'(x)$$

Das Integral dieser Differenzialgleichung ist

$$\varphi(x) = \alpha + \frac{\beta}{x}$$

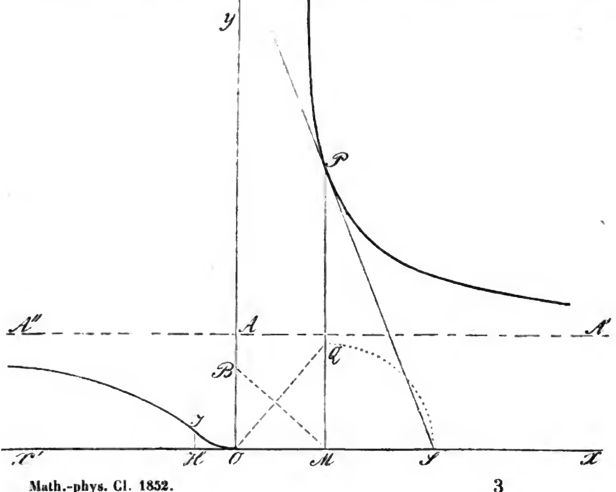
und mithin wird

$$f(x) = A^{\alpha + \frac{\beta}{x}} = A^{\alpha}(e^{\beta lA})^{\frac{1}{x}}$$

Bezeichnen wir endlich A^{α} mit a und βlA mit b, so ist die Gleichung der gesuchten Curve

16) $$y = ae^{\frac{b}{x}}$$

Diese krumme Linie ist übrigens nicht ohne Interesse; sie erleidet eine Discontinuität im Anfangspunkte der Coordinaten, sie besitzt ferner zwei Asymptoten, von denen die eine die Ordinatenachse und die andere eine in der Entfernung a der Abscissenachse parallele Gerade ist, sie hat endlich einen Inflexionspunkt an der Stelle $x = -\frac{1}{2}b$, $y = \frac{a}{e^2}$. Für die Tangente am Punkte P der Curve gilt folgende Construktion: man nehme auf der Ordinatenachse $OB = b$, ziehe nach dem Endpunkte M



der Abscisse die Gerade BM, von O aus eine Senkrechte darauf, welche die Ordinate in Q schneidet, nehme endlich $MS = MQ$, so ist MS die Subtangente, mithin PS die Tangente. Die Figur giebt eine Darstellung der Curve für die Werthe $OA = a = 10$ und $OB = b = 7$.

D'Arrest, *Sphärische Sätze.*

1. Sind A, B, C drei Punkte in einem grössten Kreise, und ist X ein vierter Punkt irgendwo auf der Kugelfläche, also auch, wenn man will, auf demselben grössten Kreise, so ist:

$$(1) \ldots \quad 2 \sin \frac{AB}{2} \sin \frac{BC}{2} \sin \frac{AC}{2} = \sin \frac{XA^2}{2} \sin BC + \sin \frac{XC^2}{2} \sin AB - \sin \frac{XB^2}{2} \sin AC.$$

In dieser Gestalt ist die Gleichung der sphärische Ausdruck eines allgemeinen planimetrischen Lehrsatzes von Stewart, dessen Chasles in der Geschichte der Geometrie (Cap. IV. § 28) erwähnt, nämlich:

$$AB \,.\, BC \,.\, AC = (XA)^2 BC + (XC)^2 AB - (XB)^2 AC.$$

Die Bedingungsgleichung für vier Punkte A, B, C, D in einem grössten Kreise kann man eleganter so schreiben:

$$(2) \ldots \quad 0 = \frac{\cos AD}{\sin AC \sin AB} - \frac{\cos BD}{\sin BA \sin BC} + \frac{\cos CD}{\sin CA \sin CB}.$$

2. Sind A, B, C, D vier Punkte in einem grössten Kreise, und ist X ein fünfter Punkt irgendwo auf der Kugelfläche, so ist:

$$(3) \ldots \quad \cos XD = \cos XA \frac{\sin \frac{DC}{2} \sin \frac{DB}{2}}{\sin \frac{AB}{2} \sin \frac{AC}{2}} - \cos XB \frac{\sin \frac{DA}{2} \sin \frac{DC}{2}}{\sin \frac{BA}{2} \sin \frac{BC}{2}} + \cos XC \frac{\sin \frac{DA}{2} \sin \frac{DB}{2}}{\sin \frac{CA}{2} \sin \frac{CB}{2}},$$

in welchem Ausdrucke die Bildung der Coefficienten an sich klar ist, und übereinkommt mit der Bildung der Coëfficienten in der

Lagrange'schen Interpolationsformel. Das negative Zeichen erhält, wie im entsprechenden Falle auf der Ebene, dasjenige Glied, in welchem zwei Segmente vom gemeinschaftlichen Punkte aus in entgegengesetzten Richtungen liegen. Nimmt man X gleichfalls auf dem grössten Kreise, so ergiebt sich hiernach die Bedingungsgleichung zwischen fünf Punkten, die irgendwie auf einem grössten Kreise sich befinden:

$$(4) \ldots\ldots \cos XA \sin\frac{BC}{2}\sin\frac{CD}{2}\sin\frac{BD}{2} + \cos XC \sin\frac{AB}{2}\sin\frac{BD}{2}\sin\frac{AD}{2}$$
$$= \cos XB \sin\frac{AC}{2}\sin\frac{CD}{2}\sin\frac{AD}{2} + \cos XD \sin\frac{AB}{2}\sin\frac{BC}{2}\sin\frac{AC}{2},$$

oder in etwas eleganterer Form:

$$(5) \ldots 0 = \frac{\cos AX}{\sin\frac{AB}{2}\sin\frac{AC}{2}\sin\frac{AD}{2}} - \frac{\cos BX}{\sin\frac{BA}{2}\sin\frac{BC}{2}\sin\frac{BD}{2}}$$
$$+ \frac{\cos CX}{\sin\frac{CA}{2}\sin\frac{CB}{2}\sin\frac{CD}{2}} - \frac{\cos DX}{\sin\frac{DA}{2}\sin\frac{DB}{2}\sin\frac{DC}{2}}.$$

Den der Gleichung (3) entsprechenden planimetrischen Ausdruck hat Chasles zuerst gegeben (a. a. O. S. 173 d. Uebers. von Sohncke). Man sieht übrigens aus (4), dass auf der Kugelfläche stets die Relation stattfindet

$$\sin\frac{BC}{2}\sin\frac{CD}{2}\sin\frac{BD}{2} + \sin\frac{AB}{2}\sin\frac{BD}{2}\sin\frac{AD}{2}$$
$$= \sin\frac{AC}{2}\sin\frac{CD}{2}\sin\frac{AD}{2} + \sin\frac{AB}{2}\sin\frac{BC}{2}\sin\frac{AC}{2}$$

unter der Bedingung dass A, B, C, D im grössten Kreise liegen.

3. Dem sphärischen Dreieck ABC, dessen gegenüberstehende Seiten respective mit a, b, c bezeichnet werden, ist ein kleiner Kugelkreis eingeschrieben, dessen Pol μ und dessen sphärischer Radius ϱ sein mag. Nennt man die sphärischen Abstände dieses Mittelpunktes von den Scheiteln

$$\mu A \ldots\ldots \varkappa,\quad \mu B \ldots\ldots \lambda,\quad \mu C \ldots\ldots \nu,$$

so hat man zur Bestimmung von $\varkappa$, λ, ν die Gleichungen

$$\operatorname{tg} \varkappa^2 = \frac{\sin b \sin c \operatorname{tg}(s-a)}{\sin s \cos(s-a)},$$
$$\operatorname{tg} \lambda^2 = \frac{\sin a \sin c \operatorname{tg}(s-b)}{\sin s \cos(s-b)},$$
$$\operatorname{tg} \nu^2 = \frac{\sin a \sin b \operatorname{tg}(s-c)}{\sin s \cos(s-c)},$$

wo s den halben Perimeter bedeutet. Multiplicirt man die Quadratwurzeln aus obigen Ausdrücken miteinander und erinnert sich, dass

$$\operatorname{tg}\varrho = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}},$$

so hat man sogleich

$$\operatorname{tg}\varkappa\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\nu = \operatorname{tg}\varrho^3 . \frac{\sin a \sin b \sin c}{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\cos(s-a)\cos(s-b)\cos(s-c)}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg}\varkappa\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\nu}{8\operatorname{tg}\varrho^3} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{\sin(a+b-c)\sin(a+c-b)\sin(b+c-a)} .$$

Weil ferner, in vollständiger Analogie mit einem planimetrischen Ausdrucke, wenn man mit r den sphärischen Radius des dem Dreieck umgeschriebenen Kugelkreises bezeichnet, die Relation stattfindet

$$\frac{2\operatorname{tg}\varrho}{\operatorname{tg}r} = \frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}},$$

so kann man das Product der Tangenten der Abstände auch so schreiben:

$$(6) \ldots . \operatorname{tg}\varkappa\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\nu = 4\operatorname{tg}r\operatorname{tg}\varrho^2 . \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos(s-a)\cos(s-b)\cos(s-c)} .$$

Diesem Ausdruck lässt sich ohne Mühe eine noch einfachere Gestalt geben. Es sei der Pol des dem Dreiecke umgeschriebenen Kreises in m, und die sphärischen Abstände dieses Punktes von den Seiten a, b, c seien der Reihe nach k, l, n; dann ist

$$\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos(s-a)\cos(s-b)\cos(s-c)} = \frac{\cos r^3 \cos\varrho^3}{\cos k \cos l \cos n \cos\varkappa \cos\lambda \cos\nu}$$

und damit geht der Ausdruck über in

$$(7) \ldots . \sin\varkappa \sin\lambda \sin\nu = 4\sin r \sin\varrho^2 . \frac{\cos r^2 \cos\varrho}{\cos k \cos l \cos n} .$$

Die Gleichungen (6) und (7) sind die sphärischen Formen eines und desselben planimetrischen Satzes, nach welchem man hat, wie leicht zu sehen,

$$\varkappa\lambda\nu = 4r\varrho^2,$$

und der in der That in den vollständigeren Lehrbüchern angeführt wird. Man weiss übrigens, dass die Complemente von k, l, n der Reihe nach die Neigungswinkel bezeichnen der Ebene des Sehnendreiecks gegen die Seiten des sphärischen Dreiecks.

Aus dem Ausdruck (6) fliesst, wenn man jetzt die halbe Winkelsumme des Dreiecks mit S bezeichnet,

$$(8) \;\ldots\; \operatorname{tg} k \operatorname{tg} l \operatorname{tg} n = \frac{1}{4} \operatorname{tg} r^2 \operatorname{tg} \varrho \,.\, \frac{\sin(S-A)\sin(S-B)\sin(S-C)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\;;$$

den entsprechenden Satz in der Ebene erhält man, sobald die Vorsylben tg wegfallen.

Beiläufig mag noch ein bemerkenswerther Ausdruck für den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks erwähnt werden. Zugleich mit dem Dreieck ABC ist sein Nebendreieck ABC' gegeben, wo mit C' der Gegenpunkt von C bezeichnet ist. Zu den vorbin angegebenen Bezeichnungen füge man noch den Pol μ' und den sphärischen Radius ϱ' des dem Nebendreieck eingeschriebenen kleinen Kreises. Setzt man nun

$$A\mu' \;\ldots .\; \varkappa',$$

so hat man für den Flächeninhalt F des ursprünglichen Dreiecks ABC

$$(9) \;\ldots .\; \operatorname{tg}\frac{1}{4}F = \sqrt[4]{\operatorname{tg}\frac{\varkappa+\varrho}{2}\operatorname{tg}\frac{\varkappa-\varrho}{2}\operatorname{tg}\frac{\lambda+\varrho}{2}\operatorname{tg}\frac{\lambda-\varrho}{2}\operatorname{tg}\frac{\nu+\varrho}{2}\operatorname{tg}\frac{\nu-\varrho}{2}\operatorname{tg}\frac{\varkappa'+\varrho'}{2}\operatorname{tg}\frac{\varkappa'-\varrho'}{2}}\,.$$

4. Fällt man von den Scheiteln des Kugeldreiecks sphärische Perpendikel $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ auf die Seiten, so schneiden sich diese, wie man weiss, in Einem Punkte D, und zwischen den Perpendikeln und deren Theilen finden gewisse einfache Beziehungen statt, welche längst bekannt sind. Zwischen je zwei sphärischen Abständen (des Durchschnittspunktes von den Scheiteln) und den beiden gegenüberstehenden Dreiecksseiten besteht überdies noch die folgende Relation:

$$(10) \;\ldots .\; \frac{\sin\frac{AD+DC}{2}}{\sin\frac{c+a}{2}} = \frac{\sin\frac{c-a}{2}}{\sin\frac{AD-DC}{2}} \cdot \frac{\cos Dm}{\cos r}\,,$$

wo m und r wiederum Pol und sphärischen Radius des dem Dreieck umgeschriebenen kleinen Kreises bedeuten.

5. Ist $ABCD \ldots .$ ein regelmässiges sphärisches n-eck, und ist P ein beliebiger Punkt auf der Peripherie des demselben umgeschriebenen kleinen Kreises, ist ferner r der sphärische Radius des letzteren, so ist entsprechend einem bekannten planimetrischen Satze von Carnot, wenn man die Ecken des Polygons mit P durch grösste Kreise verbindet:

$$(11) \ldots\ldots \sin\frac{AP^2}{2} + \sin\frac{BP^2}{2} + \sin\frac{CP^2}{2} + \ldots\ldots = \frac{n}{2}\sin r^2 .$$

Ist ferner P' ein beliebiger Punkt auf der Peripherie eines andern, mit dem umgeschriebenen Kreise concentrischen Kreises, vom sphärischen Radius r', so ist leicht zu sehen, dass, wenn man die Ecken des Polygons durch grösste Kreise mit P' verbindet, man haben wird

$$\sin\frac{AP'^2}{2} + \sin\frac{BP'^2}{2} + \sin\frac{CP'^2}{2} + \ldots\ldots = \frac{n}{2}(1 - \cos r \cos r'),$$

wofür man, $\cos\psi = \cos r \cos r'$ gesetzt, schreiben kann

$$(12) \ldots\ldots \sin\frac{AP'^2}{2} + \sin\frac{BP'^2}{2} + \sin\frac{CP'^2}{2} + \ldots\ldots = n\sin\frac{\psi^2}{2} .$$

Sind die beiden Kreise nun Gegenkreise auf der Kugel, d. h. ist $r' = 2\pi - r$, so hat man

$$\sin\frac{AP'^2}{2} + \sin\frac{BP'^2}{2} + \sin\frac{CP'^2}{2} + \ldots\ldots = \frac{n}{2}(1 + \cos r^2).$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit (11) hat man die bemerkenswerthe Formel

$$(13) \ldots\ldots \sin\frac{AP^2}{2} + \sin\frac{AP'^2}{2} + \sin\frac{BP^2}{2} + \sin\frac{BP'^2}{2} + \ldots\ldots = n,$$

deren Inhalt, nach einer leichten Transformation sich in folgendem Satz aussprechen lässt:

Ist P ein beliebiger Punkt auf der Peripherie des einem regelmässigen sphärischen Polygon umgeschriebenen Kugelkreises, ist ferner P' ein beliebiger Punkt auf der Peripherie des Gegenkreises, so ist die Summe der Cosinus der sphärischen Distanzen der Ecken des Polygons von den Punkten P und P' gleich Null, also

$$\cos AP + \cos AP' + \cos BP + \cos BP' + \cos CP + \ldots\ldots = 0 .$$

Ohne Weiteres erhält man noch einige Zusätze:

a. Ist P' ein beliebiger Punkt auf der Peripherie des grössten Kreises, der concentrisch liegt mit dem einem regelmässigen sphärischen Polygon $ABCD\ldots\ldots$ umgeschriebenen kleinen Kreise, so ist die Summe der Cosinus der sphärischen Distanzen AP', BP', $CP'\ldots\ldots$ gleich Null.

b. Ist der sphärische Radius des umgeschriebenen Kreises gleich $\frac{1}{4}\pi$, und ist P' ein beliebiger Punkt auf der Peripherie des Gegenkreises, so hat man

$$\cos AP' + \cos BP' + \cos CP' + \ldots\ldots = \frac{1}{2}n.$$

Durch die Ebenen dieser beiden Gegenkreise wird ein Cylinder bestimmt, dessen Höhe gleich ist dem Durchmesser seiner kreisförmigen Grundflächen. Geht man nun von den Bögen zu deren Sehnen über, so ist in den obigen Formeln der folgende Satz enthalten:

Schreibt man einer der Grundflächen eines Kreiscylinders, dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Basis, ein regelmässiges n-eck $ABCD \ldots$ ein, nimmt auf der Peripherie der einen Grundfläche einen beliebigen Punkt P, auf der Peripherie der andern Grundfläche einen beliebigen Punkt P', so ist immer

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 + \ldots\ldots = \frac{1}{3}(\overline{AP'}^2 + \overline{BP'}^2 + \overline{CP'}^2 + \ldots\ldots).$$

6. Unter die merkwürdigen Linien auf der Kugel, welche durch die gegenseitigen Beziehungen zweier grössten Kreise entstehen, gehört auch diejenige Curve, deren Eigenschaft es ist, dass jeder ihrer Punkte gleichen sphärischen Abstand von einer der Grundebenen und vom Pol der andern hat. Es ist dies also z. B. bei den Erscheinungen der täglichen Bewegung der Sterne diejenige Linie an der Himmelskugel, in welcher die Gestirne eine ihrer Declination gleiche Zenithdistanz einnehmen. Alle Punkte der Art liegen auf der Kugelfläche in einer **sphärischen Parabel**, deren Brennpunkte die beiden homologen Pole der in Rede stehenden grössten Kreise sind, und deren halber Parameter ($\mathfrak{p}$) bestimmt ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \mathfrak{p} = \cos \omega,$$

wenn ω den Neigungswinkel der beiden Grundebenen bedeutet.

Bleibt man nämlich beispielsweise bei den angeführten Grundebenen des Horizonts und des Aequator stehen, so gelten, der gewöhnlichen Bezeichnung zufolge, die Gleichungen

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t$$
$$\sin z \cos A = - \sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t,$$

mithin für den Fall $z = \delta$

$$\operatorname{tg} z = \cos \varphi - \operatorname{cotg} \varphi \cos t$$
$$\operatorname{tg} z \cos A = - \operatorname{tg} z \cos \varphi + \sin \varphi \cos t.$$

Die Elimination des Stundenwinkels ergiebt sofort:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos A}.$$

Dies ist, beim Uebergange zur Ebene, ohne Weiteres, die Polargleichung der gemeinen Parabel, wenn z den Radiusvector, φ den halben Parameter, A die parabolische Anomalie bezeichnen, nämlich

$$z = \frac{\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{A^2}{2}}.$$

In der That lässt sich der obige Ausdruck mit der Polargleichung für die sphärische Parabel identificiren, und es ergiebt sich

für den halben Parameter ..... $\operatorname{tg} \mathfrak{p} = \sin \varphi$

für die Excentricität ..... $e = 45 - \frac{1}{2}\varphi$.

Die Brennpunkte der Parabel sind in den hier betrachteten Systemen das Zenith und der Weltpol, der Halbirungspunkt des Bogens ZP ist der innere Mittelpunkt des sphärischen Kegelschnittes. Man sieht sogleich, dass alle Sterne in einer Zone, deren Breite der Polhöhe gleich, nämlich zwischen den Parallelen $\frac{1}{2}\varphi$ und $90 - \frac{1}{2}\varphi$, bei jeder Umdrehung zweimal eine Höhe erreichen, welche ihrer Nordpolardistanz gleich ist.

Ausgezeichnet durch äusserste Einfachheit sind die Relationen zwischen den Winkeln und Seiten im Dreieck zwischen Stern, Zenith und Pol für den Durchschnittspunkt unserer Parabel mit dem ersten Vertical. Man hat nämlich in diesem besondern Falle

$$\operatorname{tg} \delta = \sin \varphi$$
$$\cos p = \sin \varphi^2$$
$$t = \varphi,$$

mit p, wie gewöhnlich, den Positionswinkel bezeichnend.

Es mag hier, weil ich diese Bemerkung nicht gemacht finde, einer merkwürdigen Eigenschaft der sphärischen Parabel Erwähnung geschehn. Verlegt man nämlich den Anfangspunkt der im Meridian fortgezählten Abscissen (ξ) in den Scheitel der Parabel, und rechnet die sphärischen Applicaten (ζ) senkrecht darauf, so hat man

$$\operatorname{tg} \zeta^2 = \operatorname{tg} \mathfrak{p} \sin 2\xi,$$

und daraus

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \operatorname{tg} \mathfrak{p} \cos 2\xi \cos \zeta^2 \operatorname{cotg} \zeta.$$

Nun ist aber allgemein

$$\operatorname{tg}\,(\text{Subtang.}) = \sin \zeta \cos \zeta . \frac{d\xi}{d\zeta},$$

folglich für die Kugelparabel

$$\text{Subtang.} = 2\xi,$$

d. h. man construirt den tangirenden Kreis an eine sphärische Parabel des zweiten Grades durch dasselbe einfache Verfahren, nach welchem man in der Ebene eine Tangente an die gemeine Parabel legt.

A. F. Möbius, *über eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen.*

Unter den drei Theilen, in welche man die Geometrie, der Natur des Raumes gemäss, getheilt hat, ist die Longimetrie der bei weitem einfachste. Denn hier kommen bloss ein System von Punkten in einer Geraden und Relationen zwischen den gegenseitigen Entfernungen der Punkte in Betracht. Alle diese Relationen aber ergeben sich durch wiederholte Anwendung der einfachsten unter ihnen, welche besagt, dass, wenn zwei Abschnitte einer Geraden einen Grenzpunkt gemein haben, und auf verschiedenen Seiten desselben die beiden andern Grenzpunkte liegen, der zwischen diesen andern begriffene Abschnitt der Summe der zwei erstern Abschnitte gleich ist. Oder allgemeiner, und in Zeichen ausgedrückt: Sind A, B, C drei Punkte einer Geraden, so ist immer, in welcher Ordnung auch die drei Punkte in der Geraden auf einander folgen mögen:

$$AB + BC = AC,$$

dafern nur auf die durch die Stellung der Buchstaben in den Ausdrücken der Abschnitte bestimmten Richtungen und auf die dadurch bedingten Vorzeichen der Abschnitte gehörige Rücksicht genommen wird.

Ungeachtet dieser grossen Einfachheit der Longimetrie sind doch bereits mehrere sehr merkwürdige in ihr Gebiet gehörige Untersuchungen geführt worden. Schon in den mathematischen Sammlungen des Pappus (7. Buch) findet sich eine lange Reihe

von Sätzen, Relationen zwischen Abschnitten einer Geraden betreffend, und die neueren Geometer haben theils diese Sätze erweitert, theils neue hinzugefügt.

In der letztvergangenen Zeit ist es mir gelungen, diesen Sätzen eine noch grössere Erweiterung zu geben, indem ich auf eine Methode gekommen bin, durch welche zu jedem auf ein System von Punkten in einer Geraden sich beziehenden Satze ein entsprechender Satz für ein System von Punkten in einer Ebene gefunden werden kann. Ich gelangte hierzu durch die Betrachtung, dass, wenn zwischen mehrern Abschnitten einer Geraden eine Gleichung bestehen soll, und wenn die Grenzpunkte aller Abschnitte bis auf einen unmittelbar gegeben sind, dieser eine Punkt durch die Gleichung bestimmt, deshalb aber nicht immer construirbar ist, indem es geschehen kann, dass sein Abstand von einem der gegebenen Punkte, und somit auch von allen übrigen, von complexer Form, und er selbst folglich in der Geraden imaginär wird. Man weiss aber jetzt, dass ein solcher Punkt zwar nicht in der Geraden, in welcher er eigentlich liegen soll, aber doch in einer durch die Gerade zu legenden Ebene als ein reeller Punkt construirt werden kann. Ist nämlich A einer der in der Geraden gegebenen Punkte, P der gesuchte, und findet sich der Abschnitt $AP = x + y\sqrt{-1}$, so ist P derjenige Punkt der Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten $= x$ und y in Bezug auf die Gerade, als Axe der Abscissen, und den Punkt A, als Anfangspunkt, sind.

Man kann hierdurch veranlasst werden, gleich von vorn herein die Grenzpunkte aller in der Gleichung vorkommenden Abschnitte als imaginäre Punkte der Geraden und somit als reelle Punkte der Ebene zu betrachten. Die Gleichung selbst wird bei dieser Ansicht eine, oder vielmehr zwei Relationen ausdrücken, welche einer ebenen Figur zukommen und derjenigen Relation entsprechen, welche dieselbe Gleichung ursprünglich in Bezug auf ein System von Punkten in einer Geraden darstellt.

Um diese zwei Relationen für die Ebene zu erhalten, könnte man die Abstände der Grenzpunkte der Abschnitte von einem und demselben Punkte der Geraden, als Anfangspunkte, $= x + y\sqrt{-1}$, $x' + y'\sqrt{-1}$, u. s. w. setzen, wodurch die Abschnitte selbst, als Differenzen je zweier dieser Abstände, gleichfalls von complexer Form würden. Die Substitution dieser

complexen Ausdrücke für die Abschnitte in der Gleichung zwischen letztern gäbe alsdann ein Resultat von der Form: $X + Y\sqrt{-1} = 0$, wo X, sowie Y, eine reelle Function der Coordinaten x und y, x' und y', u. s. w. der Punkte der ebenen Figur ist. Die zwei Relationen selbst aber würden $X = 0$ und $Y = 0$ sein. — Indessen kann man einen für die Mehrzahl der hierher gehörenden Relationen ungleich geeigneteren Weg einschlagen, um *von der Geraden durch das Gebiet des Imaginären zu der Ebene* zu gelangen. Folgendes ist eine nähere Bezeichnung dieses Wegs.

Sind A und B zwei Punkte einer Ebene, so unterscheide man den reellen und den complexen Werth der Strecke AB.

Zur Angabe des reellen Werthes ist zuvor eine Linieneinheit festzusetzen, und von den zwei Richtungen, nach denen die durch A und B zu legende gerade Linie durchgangen werden kann, zu bestimmen, welche die positive sein soll. Der reelle Werth von AB ist alsdann die Zahl, nach welcher AB von der Linieneinheit gemessen wird, und diese Zahl ist positiv oder negativ zu nehmen, jenachdem die Richtung von A nach B die positive oder die negative Richtung der Linie ist.

Um den complexen Werth der Strecke angeben zu können, muss nächst den vorigen zwei Stücken eine beliebige Richtung in der Ebene als Normalrichtung, und von dem doppelten Sinne, nach welchem eine Linie in der Ebene gedreht werden kann, der eine als der positive vorher noch festgesetzt werden. Nach diesen Bestimmungen ist der complexe Werth von AB gleich dem reellen Werthe von AB, multiplicirt in eine gewisse Function des Winkels der Linie AB mit der Normalrichtung, d. i. des Winkels, um welchen eine Linie, welche die Normalrichtung hat, in positivem Sinne gedreht werden muss, bis ihre Richtung mit der positiven Richtung der Linie AB identisch wird. Die Winkelfunction aber ist, wenn α den Winkel bezeichnet, die bekannte: $\cos\alpha + \sqrt{-1}\,.\sin\alpha$, die im Folgenden kurz durch $\varphi(\alpha)$ ausgedrückt werde. — Bezeichnen wir daher den reellen Werth der Strecke AB einfach mit AB, ihren complexen Werth aber mit $[AB]$, und eine Linie, welche die Normalrichtung hat, mit x, so ist

$$[AB] = AB\,.\,\varphi(x^{\wedge}AB).$$

Hieraus ist zunächst leicht ersichtlich, dass für je drei beliebige Punkte A, B, C der Ebene

$$[AB] + [BC] = [AC]$$

ist. Denn in Folge der Natur der Function φ drückt diese Gleichung nichts Anderes aus, als dass, wenn man die Punkte A, B, C das einemal auf die Linie x, das anderemal auf eine in der Ebene auf x perpendiculare Linie rechtwinklig projicirt, in dem einen, wie im andern Falle die Summe der Projectionen von AB und von BC der Projection von AC gleich ist. Zwischen den complexen Werthen der gegenseitigen Abstände irgend dreier Punkte in einer Ebene besteht demnach dieselbe einfache Relation, als wie zwischen den reellen Werthen der Abstände, wenn die drei Punkte in einer Geraden liegen. Da nun, wie schon im Eingange bemerkt worden, jede zusammengesetztere Relation zwischen Abschnitten einer Geraden als das Resultat der Verbindung solcher einfachen Gleichungen zwischen den gegenseitigen Abständen dreier Punkte anzusehen ist, und da dieselben einfachen Gleichungen auch zwischen je drei Punkten der Ebene stattfinden, nur dass hier die complexen Werthe der Abstände statt der dortigen reellen zu setzen sind: so muss jede identische Gleichung zwischen den gegenseitigen Abständen von Punkten in einer Geraden auch dann noch bestehen, wenn man die Punkte in einer Ebene beliebig liegend annimmt, die Abstände aber nicht mehr in reeller, sondern in complexer Bedeutung gelten lässt. Durch weitere Entwickelung der also aufgefassten Gleichung, was insbesondere mit Anwendung der bekannten Eigenschaften der Function φ:

$$\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) = \varphi(\alpha + \beta) \text{ und } \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)} = \varphi(\alpha - \beta)$$

zu bewerkstelligen sein wird, reducirt sich die Gleichung, wie im Obigen, auf die Form $X + Y\sqrt{-1} = 0$, und die Gleichungen $X = 0$, $Y = 0$ liefern die gesuchten Beziehungen.

Nachstehende zwei Beispiele werden den Gegenstand in ein noch helleres Licht setzen. Dabei werde ich zugleich Gelegenheit nehmen, den Gebrauch eines Algorithmus für Winkel zu zeigen, der demjenigen entspricht, dessen ich mich zuerst in meinem «barycentrischen Calcul» für Linien, Dreiecksflächen und Tetraeder bedient habe, — eines Algorithmus, der mit Anwendung von Zeichen für Dinge, denen keine Grösse, bloss Lage zukommt, die arithmetischen Beziehungen zwischen den Theilen der Figur durch Formeln darstellt, welche für alle möglichen Lagen der Theile Gültigkeit haben. Baryc. Calc. S. XIV.

Reduction eines Vierecks auf ein Dreieck.

Sind A, B, C, D vier beliebige Punkte einer Geraden, so ist

$$BC = BD - CD, \quad CA = CD - AD, \quad AB = AD - BD.$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen resp. mit AD, BD, CD, und addirt sie hierauf, so kommt

$$AD \,.\, BC + BD \,.\, CA + CD \,.\, AB = 0.$$

Es muss daher auch, wenn vier Punkte $A, .. D$ irgendwie in einer Ebene liegen, die Relation bestehen:

$$(1) \qquad [AD]\,[BC] + [BD]\,[CA] + [CD]\,[AB] = 0\,.$$

Nun ist

$$[AD] = AD \,.\, \varphi(x^\wedge AD) \quad \text{und} \quad [BC] = BC \,.\, \varphi(x^\wedge BC)\,,$$

folglich

$$[AD]\,[BC] = AD \,.\, BC \,.\, \varphi(x^\wedge AD + x^\wedge BC)\,;$$

und ähnlicher Weise lassen sich die beiden andern Glieder in (1) umformen. Setzt man daher der Kürze willen

$$(2) \qquad AD \,.\, BC = p\,, \quad BD \,.\, CA = q\,, \quad CD \,.\, AB = r \quad \text{und}$$

$$(3) \quad x^\wedge AD + x^\wedge BC = \alpha\,, \quad x^\wedge BD + x^\wedge CA = \beta\,, \quad x^\wedge CD + x^\wedge AB = \gamma\,,$$

so verwandelt sich (1) in

$$p \,.\, \varphi(\alpha) + q \,.\, \varphi(\beta) + r \,.\, \varphi(\gamma) = 0\,,$$

eine Gleichung, die durch Trennung ihres reellen Theils vom imaginären in die zwei zerfällt:

$$(4) \quad \begin{cases} p \cos\alpha + q \cos\beta + r \cos\gamma = 0\,, \\ p \sin\alpha + q \sin\beta + r \sin\gamma = 0\,. \end{cases}$$

Seien nun, um dieses Resultat anschaulich auszudrücken, f, g, h drei in einer Ebene liegende und sich nicht in einem Punkte schneidende Gerade, welche mit einer vierten Geraden v der Ebene Winkel bilden, die resp. $= \alpha$, β, γ sind. Man nenne die Durchschnitte von g mit h, von h mit f, von f mit g resp. F, G, H, so ist

$$(5) \qquad v^\wedge GH = \alpha\,, \quad v^\wedge HF = \beta\,, \quad v^\wedge FG = \gamma\,.$$

Nächstdem hat man $[GH] + [HF] + [FG] = 0$, d. i., wenn man v zur Normalrichtung nimmt:

$$GH \,.\, \varphi(\alpha) + HF \,.\, \varphi(\beta) + FG \,.\, \varphi(\gamma) = 0\,,$$

eine Gleichung, die sich, wie die vorige $p \,.\, \varphi(\alpha) + .. = 0$, in die zwei spaltet:

$$GH \cos\alpha + HF \cos\beta + FG \cos\gamma = 0\,,$$
$$GH \sin\alpha + HF \sin\beta + FG \sin\gamma = 0\,.$$

Hieraus aber und aus (4) folgt $GH:HF:FG = \sin(\gamma-\beta):\sin(\alpha-\gamma):\sin(\beta-\alpha) = p:q:r$, also

$$(6)\qquad GH:HF:FG = AD\,.\,BC : BD\,.\,CA : CD\,.\,AB\,.$$

Ferner ist nach (5) und (3) zu schliessen:

$$v^{\wedge}FG - v^{\wedge}HF = x^{\wedge}CD + x^{\wedge}AB - x^{\wedge}BD - x^{\wedge}CA\,.$$

Sowie aber allgemein, wenn a, b, c drei in einer Geraden liegende Punkte bedeuten, $ac - ab = bc$ ist, *so ist mit gleicher Allgemeinheit, wenn a, b, c drei in einer Ebene enthaltene Gerade vorstellen:*

$$a^{\wedge}c - a^{\wedge}b = b^{\wedge}c\,.$$

Hiermit reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$(7)\quad \begin{cases} HF^{\wedge}FG = BD^{\wedge}CD + CA^{\wedge}AB = CA^{\wedge}CD + BD^{\wedge}AB\,, \\ \quad\text{und eben so hat man nach (5) und (3) noch} \\ FG^{\wedge}GH = CD^{\wedge}AD + AB^{\wedge}BC = AB^{\wedge}AD + CD^{\wedge}BC\,, \\ GH^{\wedge}HF = AD^{\wedge}BD + BC^{\wedge}CA = BC^{\wedge}BD + AD^{\wedge}CA\,. \end{cases}$$

Construirt man daher zu einem Viereck $ABCD$ ein Dreieck FGH, dessen Seiten die aus den Winkeln im Viereck durch (7) bestimmten Winkel mit einander machen, so verhalten sich nach (6) die Seiten des Dreiecks wie die Producte p, q, r aus den Seiten und Diagonalen des Vierecks. Es wird daher auch umgekehrt von diesen drei Producten bei einem Viereck ein jedes, absolut genommen, kleiner als die Summe der beiden übrigen sein, so dass man mit Linien, die ihnen proportional sind, ein Dreieck beschreiben kann; und in diesem Dreieck werden die Winkel die in (7) angegebenen Werthe haben, oder auch — nach dem Sinne, in welchem das Dreieck verzeichnet worden — den Ergänzungen dieser Werthe zu 360° gleich sein.

Immer aber sind bei den Formeln (6) und (7), wenn sie allgemeine Gültigkeit haben sollen, die positiven Richtungen der in ihnen vorkommenden Linien gehörig zu berücksichtigen. Ursprünglich können die positiven Richtungen der sechs je zwei der vier Punkte A, B, C, D verbindenden Geraden, ingleichen die von einer der Seiten des Dreiecks, es sei von GH, nach Belieben gewählt werden. Hiernach bestimmen sich die Vorzeichen der sieben Abschnitte AD, BD, ... AB und GH, und damit nach (6) die Vorzeichen, also auch die positiven Richtungen von HF und FG. Hiermit aber sind, wenn wir noch den positiven Sinn der Drehung in den Ebenen des Vierecks und des Dreiecks festgesetzt haben, die in (7) enthaltenen Winkel vollkommen bestimmt.

Es bedeutet nämlich $HF^{\wedge}FG$ den Winkel, um welchen die durch H und F zu legende Gerade in positivem Sinne gedreht werden muss, bis ihre positive Richtung mit der positiven Richtung der durch F und G zu legenden Geraden einerlei wird; und Analoges gilt von den übrigen Winkelausdrücken. — Bemerken wir noch, dass hiernach bei allen den Ausdrücken AD, BD, ... FG die Aufeinanderfolge der zwei Buchstaben eines jeden in der Proportion (6) wohl zu beachten ist, nicht mehr aber in den Gleichungen (7). Denn in (6) haben die Strecken GH und HG entgegengesetzte Werthe; dagegen wird in (7) durch GH eben so gut, als durch HG, eine durch G und H zu legende Gerade ausgedrückt.

Am einfachsten ist es nun, die positiven Richtungen der sieben Geraden AD, BD, .. AB und GH so zu bestimmen, dass die gleichnamigen Ausdrücke ihrer Abschnitte in (6) positiv werden, also die positive Richtung in AD von A nach D gehend, u. s. w. anzunehmen. Damit werden auch die Abschnitte HF und FG positiv, folglich die Richtungen von H nach F und von F nach G positiv.

Da auf solche Weise in den Winkelgleichungen, wie sie in (7) geschrieben worden, die durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben ausgedrückten Richtungen insgesammt positiv genommen werden können, so können wir, den Begriff der positiven Richtung ganz beseitigend, die Winkelausdrücke in diesen Gleichungen auch also deuten, dass wir $PQ^{\wedge}RS$ als den Winkel nehmen, um welchen die Linie PQ in positivem Sinne gedreht werden muss, bis ihre durch die Stellung ihrer Buchstaben ausgedrückte Richtung von P nach Q mit der durch die Stellung der Buchstaben der andern Linie ausgedrückten Richtung von R nach S identisch wird.

Hierdurch aber sind wir zugleich in den Stand gesetzt, den Winkelgleichungen eine leichter aufzufassende Form zu geben. Berücksichtigen wir nämlich, dass $PQ^{\wedge}QP$ nach voriger Erklärung $= 180°$ ist, und drücken wir den Winkel $PQ^{\wedge}PR$ einfach, und wie es gewöhnlich ist, durch QPR aus, so wird

$$HF^{\wedge}FG = HF^{\wedge}FH + FH^{\wedge}FG = 180° + HFG,$$
$$BD^{\wedge}CD = 180° + DB^{\wedge}CD = 2 \, . \, 180° + DB^{\wedge}DC = BDC,$$
$$CA^{\wedge}AB = 180° + AC^{\wedge}AB = 180° + CAB, \text{ u. s. w.}$$

und die Gleichungen (7) reduciren sich damit auf

$$(8)\quad \begin{cases} HFG = BDC + CAB = ACD + DBA, \\ FGH = CDA + ABC = BAD + DCB, \\ GHF = ADB + BCA = CBD + DAC; \end{cases}$$

wofür wir auch, weil $CAB + BAC = AC^\wedge AB + AB^\wedge AC = AC^\wedge AC = 0$, u. s. w. ist, schreiben können:

$$(8^*)\quad \begin{cases} HFG = BDC - BAC = DBA - DCA, \\ FGH = CDA - CBA = DCB - DAB, \\ GHF = ADB - ACB = DAC - DBC. \end{cases}$$

Während wir also die Aufeinanderfolge der Buchstaben bei deren paarweisen Verbindungen anfänglich nur in der Gleichung (6) zwischen Abschnitten, nicht mehr aber in den Winkelgleichungen (7) zu beachten hatten, kommt jetzt, umgekehrt, die Stellung der Buchstaben bloss bei letztern Gleichungen in Betracht und kann bei erstern ganz vernachlässigt werden, indem es bei der Construction des Dreiecks FGH mittelst der Seiten desselben bloss auf die absoluten Werthe der Producte p, q, r ankommt, denen die Seiten proportional sein sollen; und wir sind somit, ohne dass die allgemeine Anwendbarkeit der Gleichungen in Etwas beeinträchtigt würde, einer vorläufigen Bestimmung der positiven Richtungen der Linien ganz überhoben.

Uebrigens müssen die Gleichungen (8) und (8*), die wir unter der Hypothese entwickelten, dass die sieben durch AD, ... AB und GH ausgedrückten Richtungen insgesammt positiv seien, auch unter jeder andern Hypothese über diese Richtungen sich wieder finden. Nehmen wir z. B. von jenen sieben Richtungen CA negativ an und lassen die sechs übrigen positiv, so wird nach (6) HF negativ, FG aber bleibt positiv. Damit ist in den Gleichungen (7), um die zuletzt gegebene Definition eines Winkelausdrucks auf sie anwendbar zu machen, AC und FH statt CA und HF zu schreiben. Die erste und die dritte derselben — denn nur hierin kommen diese Richtungen vor — verwandeln sich dadurch in

$$FH^\wedge FG = BD^\wedge CD + AC^\wedge AB = \ldots,$$
$$GH^\wedge FH = AD^\wedge BD + BC^\wedge AC = \ldots,$$

und man sieht von selbst, wie diese Gleichungen mit den entsprechenden in (8) übereinstimmen.

Das Resultat endlich, das durch (6) und (8) oder (8*) ausgedrückt wird, liesse sich etwa also in Worte fassen:

Hat man in einer Ebene vier Punkte (A, B, C, D) und multiplicirt den gegenseitigen Abstand je zweier derselben mit dem gegenseitigen Abstande der jedesmal zwei übrigen, so kann man mit Linien, welche den drei erhaltenen Producten proportional sind, ein Dreieck (FGH) construiren. Jeder Winkel (wie F) dieses Dreiecks aber ist dem Unterschiede der Winkel gleich, unter welchen von den zwei Abständen (DA und BC), deren Product der dem Winkel gegenüberliegenden Dreiecksseite (GH) proportional ist, der eine Abstand von den Endpunkten des andern aus (BC von D und A aus oder, welches gleichviel ist, DA von B und C aus betrachtet) erscheint.

Hieran knüpft sich unmittelbar die merkwürdige Folgerung: Sind bei einem ebenen Viereck von den drei Verhältnissen zwischen den gedachten drei Producten und von den gedachten drei Winkeldifferenzen, sind von diesen sechs Stücken irgend zwei gegeben, so kann man daraus die vier übrigen finden, — ganz eben so, wie man bei einem Dreieck aus irgend zweien der sechs Stücke, nämlich der drei Verhältnisse zwischen den Seiten und der drei Winkel, die vier übrigen bestimmen kann.

Eine besondere Erwähnung dürften noch die nachstehenden zwei speciellen Fälle verdienen.

1. Sind drei der vier Punkte $A, \ldots D$, etwa A, B, C gleichweit von einander entfernt, ist also D irgend ein Punkt in der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks ABC, so verhalten sich die Producte p, q, r wie AD, BD, CD. Man kann folglich alsdann mit AD, BD, CD selbst ein Dreieck construiren, und die Winkel dieses Dreiecks werden resp. $= BDC - BAC$, u. s. w. sein.

2. Sind P, Q, R, S vier Punkte eines Kreises, so ist, jenachdem R und S auf einerlei, oder verschiedenen Seiten der Geraden PQ liegen, der Winkelunterschied $PRQ - PSQ$ entweder $= 0$, oder $= 180°$, — vorausgesetzt immer, dass alle in der-

selben Ebene enthaltenen Winkel nach einerlei Sinne gerechnet werden.

Liegen daher die vier Punkte A, B, C, D in einem Kreise, und zwar C und D auf verschiedenen Seiten von AB, so ist $BDC - BAC = 0$, $CDA - CBA = 0$, $ADB - ACB = 180°$; folglich nach (8*)

$$1)\ HFG = 0,\quad 2)\ FGH = 0,\quad 3)\ GHF = 180°.$$

Wegen 1) haben FH und FG einerlei Richtung, desgleichen GF und GH wegen 2). Mithin, und wie auch schon aus 3) allein folgt, liegen jetzt F, G, H in gerader Linie, H zwischen F und G; und es ist daher in absolutem Sinne, d. h. abgesehen von der durch die Stellung der Buchstaben angedeuteten Richtung: $GH + HF = FG$. Hieraus aber folgt nach (6) die allbekannte Gleichung zwischen den Seiten und Diagonalen eines in einen Kreis beschriebenen Vierecks:

$$AD \,.\, BC + BD \,.\, CA = CD \,.\, AB.$$

Harmonische Lage von vier Punkten in einer Ebene.

Wenn wir in der zu Anfange des vorigen Artikels aufgestellten zwischen je vier Punkten einer Geraden gültigen Gleichung zwei der drei Producte, deren Summe null war, etwa die zwei ersten, einander gleich setzen, also

$$(1)\quad AD \,.\, BC = BD \,.\, CA$$

annehmen, so reducirt sich jene Gleichung auf

$$(2)\quad 2BD \,.\, CA = BA \,.\, CD.$$

Bezeichnet ferner M den Mittelpunkt von AB, also einen dergestalt in der Geraden liegenden Punkt, dass

$$(3)\quad MA + MB = 0$$

ist, so hat man

$$AD = MD - MA,\quad BC = MC - MB = MC + MA,$$
$$BD = MD - MB = MD + MA,\quad CA = MA - MC.$$

Mit diesen Werthen für AD, BC, u. s. w. geht (1) über in

$$(4)\quad MA^2 = MC \,.\, MD.$$

Eine andere Form, die man der Gleichung (1) geben kann, ist

$$(CA - CD)\, CB = (CD - CB)\, CA,$$

d. i.

$$2\,CA\,.\,CB = CD\,(CA + CB)\,,$$

oder, weil $CA + CB = CM + MA + CM + MB = 2\,CM$ ist,

$$(5)\quad CA\,.\,CB = CD\,.\,CM;$$

und solcher Umwandlungen von (1) liessen sich noch verschiedene andere bewerkstelligen.

Wenden wir auf die jetzt gemachten die im Obigen erörterte Methode an, so wird, wenn man zu drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten A, B, C einen in ihrer Ebene begriffenen Punkt D so bestimmt, dass

$$[1]\quad [AD]\,[BC] = [BD]\,[CA]$$

ist, — so wird dann auch

$$[2]\quad 2\,[BD]\,[CA] = [BA]\,[CD]$$

sein; und wenn man einen Punkt M hinzufügt, so dass

$$[3]\quad [MA] + [MB] = 0\,,$$

so wird man noch

$$[4]\quad [MA]^2 = [MC]\,[MD]$$

und $\quad [5]\quad [CA]\,[CB] = [CD]\,[CM]\quad$ haben.

Nun wird durch die Gleichung (1), die man auch in Form der Proportion

$$CA : CB = -\,DA : DB$$

schreiben kann, ausgedrückt, dass die Linie AB in C und D nach Verhältnissen getheilt wird, deren Exponenten einander gleich und entgegengesetzt sind. Bekanntlich ist dieses die Definition der harmonischen Theilung von AB in C und D, sowie von CD in A und B. Man wird daher auch sagen können, dass zwei in einer Ebene enthaltene Paare von Punkten, A und B, C und D, eine harmonische Lage gegen einander haben, wenn zwischen den complexen Werthen der Abstände der Punkte des einen Paares von denen des andern die Gleichung [1] besteht. Und so wie die aus (1) fliessenden Gleichungen (2), (4), (5) noch andere Eigenschaften zweier in einer Geraden harmonisch liegenden Paare von Punkten ausdrücken, so werden durch [2], [4], [5] die entsprechenden Eigenschaften zweier harmonischen Paare in einer Ebene dargestellt werden.

Es ist jetzt noch übrig die reelle Bedeutung von [1] ... [5] zu entwickeln. — Die Gleichung [1] ist identisch mit

$$(a)\quad \frac{[CB]\,[DA]}{[CA]\,[DB]} = -\,1\,.$$

Es ist aber

$$\frac{[CB]}{[CA]} = \frac{CB \,.\, \varphi(x^\wedge CB)}{CA \,.\, \varphi(x^\wedge CA)} = \frac{CB}{CA} \,.\, \varphi(CA^\wedge CB)\text{, und eben so}$$

$$\frac{[DA]}{[DB]} = \frac{DA}{DB}\,\varphi(DB^\wedge DA).\quad \text{Damit verwandelt sich } (a) \text{ in}$$

$$(b) \qquad \frac{CB}{CA} \cdot \frac{DA}{DB}\,\varphi(\alpha) = -1\,,\ \text{wo}$$

$$\alpha = CA^\wedge CB + DB^\wedge DA = CA^\wedge CB - DA^\wedge DB\,.$$

Die Gleichung (b) kann aber nicht anders bestehen, als wenn $\varphi\alpha$ einen reellen Werth hat, also entweder $= 1$ oder $- 1$, und damit α entweder $= 0$, oder $= 180^\circ$ ist. Beide Hypothesen führen zu demselben Resultate. Nehmen wir die letztere an, so wird

(c) $CB\,.\,DA = CA\,.\,DB$ und (d) $CA^\wedge CB - DA^\wedge DB = 180^\circ$.

In Folge von (c) können wir die Richtungen von CA, CB, DA, DB sämmtlich positiv sein lassen und alsdann, den im vorigen Artikel gegebenen Erörterungen gemäss, statt (d) auch schreiben:

$$(e) \qquad ACB - ADB = 180^\circ.$$

Die harmonische Lage der Punktenpaare A und B, C und D in einer Ebene wird hiernach durch die zwei Gleichungen (c) und (e) bedingt. Wegen (e) müssen die vier Punkte in einem Kreise liegen, und zwar C und D auf verschiedenen Seiten von AB, also in der Folge A, C, B, D. Wegen (c) müssen die zwei Producte der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $ACBD$ einander gleich sein. Auch kann statt (c) die leicht aufzufassende Proportion

$$CA : CB = DA : DB \quad \text{oder} \quad AC : AD = BC : BD$$

gesetzt werden.

Was nun die übrigen Eigenschaften der harmonischen Lage betrifft, so folgt zunächst aus der Gleichung [2], wenn man sie ähnlicherweise wie [1] behandelt, ausser der Gleichheit der Winkel ABD und ACD und der daraus fliessenden Kreislage der vier Punkte, dass die Gleichung (2) auch für die Ebene gilt, und dass somit das Product aus den Diagonalen des Vierecks $ACBD$ doppelt so gross als das Product des einen oder des andern Paars gegenüberliegender Seiten ist, — was auch unmittelbar aus der eben aufgestellten Definition der harmonischen Lage in Verbin-

dung mit dem Satze am Ende des vorigen Artikels hervorgeht.

Aus [3] ersieht man leicht, dass M auch jetzt noch der Mittelpunkt der Linie AB ist. — Die Gleichung [4] wird nach dem bei [1] gezeigten Verfahren:

$$\frac{MA}{MC} \cdot \frac{MA}{MD}\, \varphi(\alpha) = 1\,, \quad \text{wo } \alpha = MC^{\wedge}MA + MD^{\wedge}MA\,.$$

Nehmen wir hierin die Richtungen MA, MC, MD positiv, so muss $\varphi(\alpha) = 1$, also $\alpha = 0$ sein. Dies giebt die Winkelgleichung $CMA = AMD$ und die Proportion $MC : MA = MA : MD$. Aus beiden in Verbindung folgt die Aehnlichkeit und ähnliche Lage der Dreiecke CMA und AMD; und dasselbe muss auch von den Dreiecken CMB und BMD gelten.

Auf gleiche Weise folgt endlich aus [5], dass auch die Dreiecke CMB und CAD, sowie CMA und CBD einander ähnlich und in ähnlicher Lage sind.

Bei zwei in einer Ebene harmonisch liegenden Paaren von Punkten A und B, C und D sind demnach, wenn M den Mittelpunkt des einen Paares AB bezeichnet,

die Dreiecke CMA, AMD, CBD, ingleichen
die Dreiecke CMB, BMD, CAD

einander ähnlich und in ähnlicher Lage.

Noch lässt sich aus der Gleichheit der Winkel CMA und AMD eine sehr einfache Construction folgern, um, wenn von zwei harmonischen Paaren von Punkten das eine Paar A und B, und der eine Punkt C des andern Paares gegeben sind, den andern Punkt D des letztern zu finden. Man beschreibe nämlich durch A, B, C einen Kreis, trage auf diesen von B aus einen Bogen BE, gleich und in gleichem Sinne mit dem Bogen CA, und lege durch E und den Mittelpunkt M der Linie AB eine Gerade, so wird der zweite Durchschnitt derselben mit dem Kreise der gesuchte Punkt D sein.

Man kann den Punkt D auch dadurch finden, dass man in A und B an den Kreis zwei Tangenten legt und den gegenseitigen Durchschnitt derselben, welcher F heisse, mit C durch eine Gerade verbindet; denn diese wird den Kreis zum zweitenmale in D schneiden. — In der That sind nach dieser Construction

die Dreiecke AFC und DFA, sowie die Dreiecke BFC und DFB einander ähnlich; mithin

$$AC : DA = FC : FA \text{ und } BC : DB = FC : FB,$$

woraus, wegen $FA = FB$, die Fundamentalproportion

$$AC : DA = BC : DB$$

folgt.

Je zwei Punkte C und D eines Kreises, so schliessen wir hieraus noch, welche mit zwei bestimmten Punkten A und B des Kreises in Harmonie sind, liegen demnach mit einem bestimmten Punkte F in gerader Linie. — Rückt C unendlich nahe an A oder an B, so thut dasselbe, in Folge der Fundamentalproportion, auch D, und es muss daher, wie wir bereits wissen, auch jede der beiden an A und B gelegten Tangenten den Punkt F treffen.

Auf ähnliche Art, wie die harmonische Theilung einer Linie, habe ich auch die Eigenschaften der Involution von sechs Punkten in einer Geraden auf die Ebene überzutragen gesucht. Die sehr merkwürdigen Resultate, die ich hierbei gefunden, so wie eine neue Art von Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren, eine Verwandtschaft, die sich mir durch Uebertragung collinear verwandter Systeme von Punkten in einer Geraden auf die Ebene ergab, gedenke ich später mitzutheilen und will hier nur noch bemerken, dass aus dieser neuen Verwandtschaft eben so, wie aus jeder der schon bekannten, eine besondere Classe von Aufgaben entspringt, und dass die einfachste dieser Aufgaben die bereits im vorigen Artikel erwähnte ist, wonach bei einem Viereck aus irgend zweien gewisser sechs Stücke jedes der vier übrigen gefunden werden kann.

ÖFFENTLICHE SITZUNG AM 14. NOVEMBER 1852.

P. A. Hansen, *Neue directe Auflösung des Keppler-schen Problems.*

Man kennt die Bemühungen der Geometer für die directe Auflösung des Keppler'schen Problems, und man weiss nicht weniger, auf wie weitläuftige und zusammengesetzte Gesetze der Coefficienten der Mittelpunktsgleichung jeder gekommen ist. Ich beehre mich hiermit der Königl. Gesellschaft eine Auflösung vorzulegen, die ich kürzlich gefunden habe, und die in dieser Beziehung das Gegentheil von allen bisher vorhandenen ist, indem sie auf ein einfaches Gesetz dieser Coefficienten hinführt.

Sei g die mittlere Anomalie,
φ der Excentricitätswinkel,
i eine ganze und positive Zahl.

Man setze

$$\beta = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi\,; \quad \mu = i \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$P_i = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{2.3} + \cdot\cdot + \frac{\mu^i}{2.3\,..\,i}, \qquad Q_1 = 1 - \mu$$

$$P_{i+1} = P_i + \frac{\mu^{i+1}}{2.3\,..\,i+1} \qquad Q_2 = Q_1 + \frac{\mu^2}{2}$$

$$P_{i+2} = P_{i+1} + \frac{\mu^{i+2}}{2.3\,..\,i+2} \qquad Q_3 = Q_2 - \frac{\mu^3}{2.3}$$

u. s. w. u. s. w.

Dann ist die Mittelpunktsgleichung

$$= (1-\beta^2)\, \Sigma_1^\infty \frac{2}{i} \left\{ P_i\, \beta^i + P_{i+1}\, Q_1\, \beta^{i+2} + P_{i+2}\, Q_2\, \beta^{i+4} + \ldots \right\} \sin ig.$$

Die Analyse, die mir dieses Resultat gegeben hat, ist auf alle Functionen des Radius und der Anomalieen anwendbar, die man in der Astronomie nach sin ig oder cos ig zu entwickeln pflegt. Eine ausführliche Abhandlung darüber habe ich beinahe fertig.

(Verlag von S. Hirzel in Leipzig.)

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Kön. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Jablonowskischen Gesellschaft. Mit Leibnizens Bildniss. Hoch 4. 1846. 5 Thlr.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Jablonowskischen Gesellschaft. I. Hoch 4. 1847. 20 Ngr.

Inhalt: H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*.

— № II. Hoch 4. 1850. 16 Ngr.

Inhalt: H. B. GEINITZ, das Quadergebirge oder die Kreideformation in Sachsen. Mit 1 col. Tafel.

— № III. Hoch 4. 1851. 10 Ngr.

Inhalt: J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Aus den Jahren 1846 u. 1847. 12 Hefte in gr. 8. à 10 Ngr.

— Aus dem Jahre 1848. 6 Hefte in gr. 8. à 10 Ngr.

— der philologisch-historischen Classe. 1849. 5 Hefte. 1850. 4 Hfte. 1851. 5 Hfte. 1852. 1. 2. Hft. gr. 8. à 10 Ngr.

— der mathematisch-physischen Classe. 1849. 3 Hefte. 1850. 3 Hefte. 1851. 2 Hefte. gr. 8. à 10 Ngr.

ABHANDLUNGEN der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. I. Hoch 4. 1852. 4 Thlr. 16 Ngr.

Inhalt:

A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. (24 Ngr.)

P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\,\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. (12 Ngr.)

A. SEEBECK, über die Querschwingungen gespannter und nicht gespannter elastischer Stäbe. (10 Ngr.)

C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. (10 Ngr.)

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Widerstandsmessungen. (1 Thlr.)

F. REICH, neue Versuche mit der Drehwaage. (20 Ngr.)

M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. (16 Ngr.)

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über Diamagnetismus. (20 Ngr.)

Vom II. Bande ist bis jetzt erschienen:

M. W. DROBISCH, über musikal. Tonbestimmung u. Temperatur. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. 1 Thlr. 10 Ngr.

INHALT.

Seite

A. F. Möbius, Beitrag zu der Lehre von der Auflösung numerischer Gleichungen 1

C. F. Naumann, Versuch einer neuen Interpretation der Turmalin-Analysen 4

F. Reich, über die Regenmenge zu Freiberg 15

Lehmann, über die Krystallisirbarkeit eines der Hauptbestandtheile der Blutkörperchen 23

O. Schlömilch, über die Auflösung von Funktionsgleichungen . . 27

D'Arrest, Sphärische Sätze 34

A. F. Möbius, über eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen 41

P. A. Hansen, neue directe Auflösung des Kepplerschen Problems . 55

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

BERICHTE

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

1852.

II.

LEIPZIG.
BEI S. HIRZEL.
1853.

ÖFFENTLICHE SITZUNG AM 14. NOVEMBER 1852.

(FORTSETZUNG.)

M. W. Drobisch, *Ueber die Wellenlängen und Oscillationszahlen der farbigen Strahlen im Spectrum.*

Bei Gelegenheit meiner Arbeit über musikalische Tonbestimmung und Temperatur, die vor Kurzem im zweiten Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe unsrer Gesellschaft veröffentlicht worden ist, ward ich auf Untersuchungen über die Newton'sche Analogie zwischen Farben- und Tonverhältnissen geführt, deren Ergebnisse ich in der Augustsitzung d. J. vortrug und, mit Genehmigung der Classe, meiner Abhandlung als zweiten Anhang beifügte. Ich durfte hierbei als bekannt voraussetzen, dass die Physiker sich dieser Analogie wenig geneigt zeigen, indem sie einerseits gegen die Form, in welcher sie Newton (*Opt. Lib. I. P. II. Prop. III. Exper. VII*) auf die Dimensionen des Spectrums bezog, erinnern, dass wegen des mit der Substanz des Prisma's sich ändernden Zerstreuungsvermögens constante Verhältnisse der Theile des Farbenbildes sich nicht angeben lassen, andrerseits überhaupt die ganze Vergleichung mehr für einen Rest von jenen pythagorisch-platonischen Phantasiespielen, die selbst der grosse Kepler noch liebte, als für eine dem nüchternen und strengen Geiste der neueren Naturforschung angemessene Beziehung gehalten wissen wollen. Wäre es nöthig gewesen, Namen zu nennen, so hätte ich mich auf Prevost (*Mém. de l'Acad. de Berlin* 1802, *p.* 77 u. 93), E. G. Fischer (mechan. Naturlehre, II, 239), Brandes (Gehler's n. physik. Wörterb. I, 310 u. IV, 91), Littrow (ebendas. IX, 215),

A. v. Humboldt (Kosmos III, 440) u. A. berufen können. Beiderlei Bedenken schienen mir jedoch gehoben, wenn man, von dem jetzt allgemein anerkannten analogen Ursprung der Farben und Töne durch Schwingungen ausgehend, sich die Frage vorlegte, ob nicht vielleicht die Vibrationsmengen der den Grenzen der prismatischen Farben zukommenden Strahlen in analogen Verhältnissen zu der Vibrationsmenge der äusseren Grenze des Roth ständen, wie die kleine Secunde, kleine Terz, Quarte, Quinte, grosse Sexte, kleine Septime und Octave (oder, wie man es kürzer ausdrücken kann, die Töne der phrygischen Kirchentonart, vgl. Marx' allgemeine Musiklehre S. 72) zur Prime, und hiedurch die Newton'sche Analogie sich bestätigen oder widerlegen lasse. Dieser Gedanke hat weder etwas Ungereimtes noch Phantastisches. Denn wenn es eine Thatsache ist, dass an die einfachsten Zahlenverhältnisse sich Tonverbindungen von sehr bestimmtem (consonirenden oder dissonirenden) Charakter knüpfen, so könnte diese Thatsache, wenn sie auch ihrem letzten Grunde nach noch nicht aufgeklärt ist, sich gar wohl bei den Farben wiederholen. *) Diese Untersuchung schien mir nun mittels der unter Fresnel's und Herschel's Namen jetzt allgemein bekannten Bestimmungen jener Oscillationsmengen geführt werden zu können, und ich glaube richtig gezeigt zu haben, »dass, wenn diesen Zahlen, selbst nur in ihren Verhältnissen, absolute Gültigkeit zukommt, auch Newton's Analogie ohne alle Beschränkung gilt.« (S. 114 meiner Abhdlg.) Es ergab sich nämlich aus den Tafeln Fresnel's und Herschel's, dass die Schwingungsmengen der Farbengrenzen sich verhalten wie die Zahlen

$$1,\ \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{2}{3}},\ 2^{\frac{2}{3}}.$$

Da nun Newton aus seinen Messungen der Durchmesser der farbigen Ringe gefolgert hatte (*Opt. Lib. II. Pars III. Prop. XVI*), dass die *intervalla vicium facilioris reflexionis et transmissus* den Reciproken der vorstehenden Zahlen proportional seien, nach

*) Ueberdies hat auch schon Young Vergleiche dieser Art angestellt. Er sagt (*Philos. Transact. fr. 1802. p. 38*): *The whole visible spectrum appears to be comprised within the ratio of three to five, or a major sixth in music; and the undulations of red, yellow, and blue, to be related in magnitude as the numbers* 8, 7, *and* 6; *so that the interval from red to blue is a fourth.*

Young und Fresnel aber in der Undulationslehre ein solches Intervall gleichbedeutend mit einer halben Wellenlänge des Lichts ist, und die Längen der Lichtwellen sich umgekehrt wie die Oscillationsmengen verhalten, so musste ich mein Resultat als eine volle Bestätigung der Newton'schen Analogie ansehen, wofern nur dieselbe nicht auf die Dimensionen des Spectrums, sondern auf die Oscillationsmengen der Grenzstrahlen bezogen wurde. Denn offenbar verhielten sich dann die Quadratwurzeln aus den Cubikzahlen derselben wie die Schwingungszahlen der Töne der phrygischen Tonleiter.

An der Voraussetzung, dass in den Fresnel'schen und Herschel'schen Zahlen Resultate neuerer Messung vorlägen, kam mir nicht in den Sinn zu zweifeln, da ich höchst bedeutenden Autoritäten Glauben schenken musste. Cauchy, dessen Werke *sur la dispersion de la lumière* ich die Fresnel'sche Tafel entlehnte, sagt (p. 196): *les épaisseurs des ondes relatives aux couleurs principales du spectre solaire, et aux limites de ces couleurs, ont été déterminées par Fresnel avec une grande précision.* Littrow (Gehler's physik. Wörterbuch, VI, 349), nachdem er die Messungsmethode Fresnel's beschrieben, fügt hinzu: »Fresnel hat diese Messungen mit grosser Genauigkeit vorgenommen und folgende Resultate erhalten.« Ebenso sagt Arago von den Fresnel'schen Längenbestimmungen der Lichtwellen in einer von Humboldt veröffentlichten handschriftlichen Mittheilung (Kosmos III, 128): »*voici les amplitudes des ondulations deduites expérimentalement d'une série de faits relatifs aux interférences.*« Aehnliche Versicherungen wie die vorstehenden finden sich in den Lehrbüchern der Physik von Pouillet (§ 420) und Lamé (§ 585) und wahrscheinlich in noch manchen andern. — Ueber die Herschel'schen Zahlen fand ich bei Cauchy (p. 199) die freilich wenig aufklärende Bemerkung, dass ihre Abweichung von den Fresnel'schen hauptsächlich auf der Verschiedenheit der angenommenen Länge der Lichtwellen beruhe, was ich nach einer Andeutung von Brandes (Gehler's Wörterbuch VI, 348) so auslegen zu müssen glaubte, dass Herschel die Newton'sche Messung der Durchmesser der farbigen Ringe wiederholt habe und auf diesem Wege zu seinen Bestimmungen der Wellenlängen, aus denen dann die Oscillationszahlen von selbst folgen, gelangt sei.

Ein mir befreundeter ehemaliger Zuhörer, Herr Dr. Richard

Baltzer in Dresden, der sich bereits durch mehrere geometrische Arbeiten vortheilhaft bekannt gemacht hat, fand sich jedoch durch meine Abhandlung veranlasst, dem Grunde der Differenzen zwischen den Angaben Fresnel's und Herschel's weiter nachzuforschen, und ist zu einem Resultate gelangt, das wenigstens allen denen, welche sich, wie ich, auf Autoritäten, wie die vorgenannten, verlassen haben, überraschend sein wird, und um so mehr bekannt zu werden verdient, als die irrige Ansicht bereits eine sehr verbreitete zu sein scheint. Fresnel's Tafel der Wellenlängen findet sich, wie Dr. Baltzer bemerkt, in seiner Abhandlung *sur la lumière*, die im Auszug in Poggendorff's Annalen (III, 89) eine Stelle gefunden hat. Es wird unbedenklich sein, sich auf diese, obschon noch mittelbare Quelle zu beziehen. Hier sagt Fresnel (Ann. S. 114): »Machte man die soeben beschriebenen Versuche mit den sieben Hauptfarben, welche Newton im Sonnenspectrum unterschied, und mässe die Breite der Streifen mit Hülfe des früher erwähnten Mikrometers, so sieht man ein, dass sich daraus, mittels Rechnung, die entsprechenden Werthe von d (der Wellenlänge) finden liessen. Diese Versuche habe ich indess mit Sorgfalt nur bei dem ziemlich homogenen rothen Lichte angestellt, welches gewisse Kirchenfenster durchlassen. Für die vorwaltenden Strahlen dieses Lichts, welche nahe auf die Grenze des Sonnenspectrums fallen, ist die Länge $d = 0{,}000638$ Millimeter. Man kann den Werth von d für die sieben Hauptgattungen von Strahlen aus Newton's Beobachtungen über die farbigen Ringe ableiten, und es reicht dazu hin — — diejenigen Längen mit 4 zu multipliciren, welche er Accesse der Lichtmolekel zur leichteren Reflexion oder Transmission genannt hat. Auf diese Art ward folgende Tafel berechnet.« Es ist dies mit einer einzigen ganz unbedeutenden Differenz (bei Grün 511 statt 512), dieselbe Tafel, die sich bei Cauchy (a. a. O. S. 197) findet. Wir lassen sie folgen.

Grenzen der Hauptfarben.	Aeusserste Werthe von *d*.	Hauptfarben.	Mittlere Werthe von *d*.
Aeusserstes Violett	0^{mm},000406		
		Violett	0^{mm},000423
Violett — Indigo	0,000439		
		Indigo	0,000449
Indigo — Blau	0,000459		
		Blau	0,000475
Blau — Grün	0,000492		
		Grün	0,000512
Grün — Gelb	0,000532		
		Gelb	0,000551
Gelb — Orange	0,000571		
		Orange	0,000583
Orange — Roth	0,000596		
		Roth	0,000620
Aeusserstes Roth	0,000645		

Sagt nun hier Fresnel selbst deutlich genug, dass seine Tafel ganz auf Newton's Angaben beruht, so wird dies, wie Dr. Baltzer fand, zur vollen Gewissheit, wenn man dieselbe mit der Tafel vergleicht, die Biot (Lehrb. der Experim. Physik, übers. von Fechner, IV, 62) unmittelbar aus den Newton'schen Datis durch eine Rechnung, die er ausführlich beschreibt, abgeleitet hat. Er bestimmt hier in Milliontheilen des englischen Zolls die »Längen der Anwandlungen der verschiedenen Lichtmolecüle«. Diese Längen sind die Hälften von Newton's *intervallis vicium (intervals of fits)*, welche wiederum die Hälften der Young-Fresnel'schen Wellenlängen sind. Es müssen also die Vierfachen der Biot'schen Tafel die Wellenlängen geben. Dies ist in der That der Fall. Da nämlich 1 Z. engl. = 0,000254 Millimeter, das Vierfache hiervon also = 0,001016 ist, so braucht man nur die Biot'schen Zahlen unter der Rubrik »im leeren Raum« mit diesem Factor zu multipliciren, um vollkommen genau die Fresnel'schen Wellenlängen zu erhalten. Die Fresnel'sche Tafel besitzt hiernach durchaus keine Originalität, sondern ist nur eine Umgestaltung der Biot-Newton'schen im Sinne der Undulationslehre. Die näheren Angaben über die erwähnte einzige eigne Messung Fresnel's stehen im 30sten Bande von Poggendorff's Annalen (nach *Mém. de l'Acad. d. Sc. T. V*). Bedürfte es noch einer Bestätigung des zuvor Gesagten, so würde man sie hier finden. Denn Fresnel sagt an dieser Stelle (S. 184 Anm.): »Nach Newton's Messungen bei den Farbenringen ist die Undulationslänge für die äussersten rothen Strahlen 0^{mm},000645, die für die Strahlen an der Grenze

des Roth und Orangefarbenen 0mm,000596, also für die mittleren rothen Strahlen 0mm,000620. Mithin entspräche die Länge 0mm,000638 einem Punkte des Sonnenspectrums, der dem Ende des Roth näher läge als der Mitte desselben, wenn Newton's Angaben nicht ein wenig zu klein sind.« Die Zahlen, welche hier Newton zuerkannt werden, sind, wie man sieht, eben dieselben, welche die jetzt nach Fresnel benannte Tafel enthält.

Was die Herschel'sche Tafel der Wellenlängen betrifft, so fand Dr. Baltzer ihr Original in Young's Abhandlung *On the theory of light and colours (Lectures of natur. philos. II*, 627*)*, die zuerst in den *Philos. Transact. f.* 1802 veröffentlicht wurde. Sie ist mit Weglassung der Columne »*number of undulations in an inch*«, folgende, wo die Ueberschrift der zweiten Columne »*length of an undulation in parts of an inch, in air*«, die der dritten »*number of undulations in a second*« lautet.

Extreme .	0,0000266	463 *millions of millions*
Red	0,0000256	482
Intermediate	0,0000246	501
Orange . . .	0,0000240	512
Intermediate	0,0000235	523
Yellow . . .	0,0000227	542
Intermediate	0,0000219	561 (= 2^{48} *nearly*)
Green	0,0000211	584
Intermediate	0,0000203	607
Blue	0,0000196	629
Intermediate	0,0000189	652
Indigo	0,0000185	665
Intermediate	0,0000181	680
Violet	0,0000174	707
Extreme .	0,0000167	735

Die Undulationszahlen weichen von denen Herschel's ab, was sich daraus erklärt, dass dieser (*On light* § 575) die Geschwindigkeit des Lichts zu 192000 engl. Meilen (à 5280 Fuss), also zu 1013760000 Fuss, annimmt, Young dagegen sie zu 500000 Millionen Fuss in 8⅛ Minuten ansetzt, was über 1025640000 Fuss beträgt, daher die Herschel'schen Undulationszahlen etwas kleiner werden müssen. Was aber die Wellenlängen betrifft, so kann man zwar keine absolute Uebereinstimmung mit den Fresnel'schen erwarten, da diese sich auf den leeren Raum, die Young's aber auf Luft beziehen,*) also nur Proportionalität zu

*) Wiewohl, mag man nun den Reductionsfactor = 1,000276 oder = 1,000294 annehmen, der Unterschied zu gering ausfallen würde, als dass er, wenn man nicht über Zehnmilliontel des Zolls hinausgeht, die Zahlen ändern könnte.

fordern ist, welche auch stattfindet; sie sollten sich jedoch als die Vierfachen der entsprechenden Zahlenwerthe in der angeführten Biot'schen Tafel (IV, 62) unter der Rubrik »in der Luft« darstellen, was nicht genau der Fall ist. Denn diese Vierfachen geben für die Grenzstrahlen in Zehnmillionteln des englischen Zolls, in derselben Ordnung genommen, 254, 235, 225, 209, 194, 181, 173, 160, wo Young 266, 246, 235, 219, 203, 189, 181, 167 hat. Dass aber dieser seine Zahlen ganz auf dieselbe Weise wie Fresnel aus den Newton'schen Angaben abgeleitet hat, sagt er deutlich mit den Worten: »*From Newton's measures of the thicknesses reflecting the different colours, the breadth and duration of their respective undulations may be very accurately determined.*« Nach Newton ist diese Dicke für die Grenze des Gelb und Orange $\frac{1}{89000}$ des engl. Zolls oder $\frac{10000}{89}$ Zehnmilliontel dieses Zolls. Dies giebt verdoppelt 225. Nimmt man dagegen mit Young 235 an, so müsste jene Dicke $\frac{1}{85106}$ e. Z. betragen. Es scheint daher fast, als ob hier ein Schreibfehler in der Grundbestimmung (235 statt 225) die abweichenden Zahlen der ganzen Tafel veranlasst hätte. Im Uebrigen ist dies für unsre Frage von keiner Bedeutung, da es fest steht, dass auch diese Young'sche Tafel nicht auf neuern Messungen beruht. Was aber die Newton'schen Messungen betrifft, so ist die eben angeführte die einzige, die er angiebt; von den Dicken der Luftschichten an den sämmtlichen Farbengrenzen sagt Newton nur, dass sie, nach seinen Experimenten, den Cubikwurzeln der Quadrate der Saitenlängen der Töne proportional seien, welche wir mit *D*, *E*, *F*, *G*, *A*, *H*, *c*, *d* bezeichnen.*) Wie gross die Uebereinstimmung zwischen diesen Zahlenverhältnissen und den wirklichen Messungen gewesen sein mag, lässt sich, da er diese selbst nicht mitgetheilt hat, nicht mehr beurtheilen.

Hieraus geht nun klar hervor, dass sowohl die Fresnel'schen als die Herschel'schen Bestimmungen der Wellenlängen und Vibrationszahlen der farbigen Strahlen ganz und gar die Newton'sche Analogie zur Basis haben, und die Voraussetzung, von der ich bei meiner Arbeit ausgehen zu dürfen glaubte, dass mir in jenen Bestimmungen Resultate neuerer Messungen vorlägen, durch welche die Richtigkeit jener Analogie

*) *Opt. L. II. P. I. Obs XIV.*

geprüft werden könnte, eine irrige war. Verliert nun hierdurch allerdings das Resultat meiner Rechnungen allen Werth, indem es nur das reproducirt, was versteckt die Voraussetzung der Voraussetzung ist, so erhält doch die Sache selbst, der ich diente, durch diese Enthüllung eine wesentliche Unterstützung. Denn es erhellt, dass nicht nur der Freund der Emissionslehre Biot, sondern auch ihre Gegner, Young, Fresnel und Herschel, die Analogie zwischen Farben- und Tonverhältnissen als ein durch Newton's Messungen wohlbegründetes Gesetz ansehen. Wäre mir dies früher bekannt gewesen, so hätte ich nur einfach zu bemerken gehabt, dass, wenn auch die Analogie zwischen den Dimensionen des Spectrums und den Tonverhältnissen der phrygischen Scala mit Recht als ein Irrthum Newton's bezeichnet werde, doch die Proportionalität zwischen den Quadratwurzeln der dritten Potenzen der Vibrationszahlen der Strahlen der Farbengrenzen und den Schwingungszahlen jener Töne den genannten grossen Physikern für ein Gesetz gelte, und somit eine Analogie zwischen Farben- und Tonverhältnissen bei ihnen in der That Anerkennung finde. Ich muss es ertragen, wenn man mich tadelt, weil ich nicht bis auf die letzten Quellen zurückgegangen bin; es ist aber doch überraschend, dass in einer exacten Wissenschaft wie die Physik nicht auch die abgeleiteten Quellen, wie man sieht, immer zuverlässig genug sind, um auf ihre Angaben ohne Misstrauen weiterbauen zu können.

Bei dem grössten Vertrauen zu Newton's Gewissenhaftigkeit und Schärfe im Beobachten und Messen bleibt indess immer noch eine Prüfung des aus seinen Beobachtungen gezogenen Resultats höchst wünschenswerth; denn ein ohne alle Controle der zum Grunde liegenden Messungen anerkanntes Gesetz scheint denn doch zu den Ausnahmen von der Regel zu gehören, die sonst in der Physik streng beobachtet zu werden pflegt. Newton's Messungen sind nun zwar, allem Anschein nach, von Niemand wiederholt worden, dagegen besitzen wir bereits seit mehr als 30 Jahren in Fraunhofer's auf anderem Wege gefundenen Längen der Lichtwellen Massbestimmungen derselben von der grössten Zuverlässigkeit und allgemein bewunderter Schärfe. Es fragt sich nun, ob und in wie weit diese zur Prüfung des Newton'schen Gesetzes benutzt werden können.

Fraunhofer hat zwei Reihen von Messungen angestellt,

von denen die erste in der Abhandlung »Neue Modificationen des Lichtes u. s. w.« (Denkschriften der k. Akad. zu München VIII, 38), die zweite schärfere in dem »Kurzen Bericht von den Resultaten neuerer Versuche über die Gesetze des Lichtes u. s. w.«, (Gilbert's Annalen B. 74. S. 359), enthalten ist. In dem letzteren findet sich zugleich (Ann. S. 343) auch die ältere Reihe seiner Messungen. Fraunhofer's Bestimmungen beziehen sich jedoch weder auf die Grenzen der sieben Hauptfarben, noch auf die Mitten zwischen diesen Grenzen, sondern auf sieben der von ihm schon früher entdeckten dunklen Linien im Spectrum (Münchn. Denkschriften V, 193), welche ziemlich unregelmässig in demselben vertheilt sind, und die er mit den Buchstaben *B, C, D, E, F, G, H* in dem beigegebenen Bilde des Spectrums bezeichnet. Hinsichtlich der Färbung der Strahlen bei diesen Linien bemerkt F. (Denkschriften VIII, 27), dass *B* tief im Rothen, *C* ebenfalls im Rothen, *D* im Orange, *E* im Grünen, *F* im Anfang vom Blau, *G* im Indigo, *H* im Violetten liege. In dem kurzen Berichte wird (Annal. B. 74. S. 341) *B* als ein rother Strahl angegeben, der gegen das Ende des Spectrums liegt, die Wellenlänge für ihn aber nicht bestimmt, da diese Linie wegen der grossen Ausdehnung des Bildes nicht so gut zu sehen war, um ihren Ort mit Sicherheit bestimmen zu können. Bezeichnen wir die Wellenlängen dieser Strahlen nach Fraunhofer's älteren Messungen durch B, C, D, ... H, nach den späteren (die er für so genau hält, dass nach seiner Ueberzeugung für die helleren Farben nicht der tausendste Theil der Länge der Lichtwelle ungewiss sein kann) durch C', D', E', ... H', so stellt folgende Tafel diese Längen in Hundertmillionteln des Pariser Zolls dar.

$B = 2541$	
$C = 2425$	$C' = 2422$
$D = 2175$	$D' = 2175$
$E = 1943$	$E' = 1945$
$F = 1789$	$F' = 1794$
$G = 1585$	$G' = 1587$
$H = 1451$	$H' = 1464$.

Auf den ersten Anblick scheint nun bei der nicht näher bestimmten Lage dieser fixen Linien gegen die Farbengrenzen eine Vergleichung dieser Messungsresultate mit den Berechnungen nach Newton nicht ausführbar. Bei näherer Betrachtung ergiebt

sich jedoch, dass sie allerdings zur Prüfung des von Newton angenommenen Gesetzes benutzt werden können. Es ist auffallend, dass Cauchy, der bei seinen Untersuchungen über die Dispersion des Lichtes die ältere Reihe der Fraunhofer'schen Bestimmungen durchaus als Grundlage braucht, dieselben nicht mit der Fresnel'schen Tafel, die er unmittelbar darauf folgen lässt, verglichen hat; ich muss jedoch bekennen, mich bei meiner eignen Arbeit über die Newton'sche Analogie desselben Fehlers schuldig gemacht zu haben. Reducirt man nämlich die erste Reihe von Fraunhofer's Beobachtungen, welche sich auf Wellenlängen in der Luft beziehen, auf den leeren Raum, und die Theile des Pariser Zolls auf Millionte1 des Millimeters, so ergiebt sich (vgl. Cauchy p. 194 u. 197) folgende Zusammenstellung:

nach Fresnel.		nach Fraunhofer.	
Aeusserstes Roth	645		
		B, roth	688,0
		C, roth	656,6
Roth — Orange	596		
		D, orange	588,9
Orange — Gelb	571		
		E, grün	526,1
Gelb — Grün	532		
		—	—
Grün — Blau	492		
		F, blau	484,4
Blau — Indigo	459		
		G, indigo	429,2
Indigo — Violett	439		
		H, violett	392,9
Aeusserstes Violett	406		

Nur die Strahlen D, E, F zeigen hier Werthe, welche mit den Fresnel'schen Grenzwerthen, folglich mit dem von Newton angenommenen Gesetz verträglich sind, dagegen fallen B und C über die Grenze des Rothen, H über die des Violetten hinaus, G läge fälschlich im Violetten. Natürlich ist nun auch der Quotient $\frac{B}{H} = 1,75108$ grösser als der Quotient aus den Wellenlängen der äussersten Grenzstrahlen nach dem Newton'schen Gesetz, $2^{\frac{2}{3}} = 1,58740$, indess er doch, da B und H zwischen den äussersten Grenzen des Spectrums liegen, kleiner sein sollte. Die zweite Reihe der Fraunhofer'schen Messungen ist von der ersten zu wenig verschieden, als dass diese ein dem New-

ton'schen Gesetz günstigeres Resultat geben könnte. Dieses Gesetz muss daher in der Form, in welcher es von Newton aufgestellt und von Biot, Young, Fresnel und Herschel angenommen wurde, als unverträglich mit den Messungen Fraunhofer's, aufgegeben werden.

Es kann jedoch weiter in Erwägung gezogen werden, ob sich dasselbe nicht in solcher Weise modificiren lässt, dass es, ohne seinen Charakter als Analogie zur phrygischen Tonleiter zu verlieren, mit den Fraunhofer'schen Messungen nicht mehr im Widerspruch steht. Dass dies möglich, und von welcher Art die dazu erforderliche Modification ist, lässt sich auf folgende Weise zeigen.

Untersuchen wir nämlich, ob es einen Exponenten z giebt, der, an die Stelle des Newton'schen $\frac{2}{3}$ gesetzt, die relativen Schwingungszahlen der phrygischen Tonleiter auf Potenzen erhebt, welche Grenzbestimmungen der Farben geben, die mit Fraunhofer'schen Messungen vereinbar sind. Sei die unbekannte Wellenlänge des dem äussersten Roth zugehörigen Strahles $= \lambda$, so werden dann die Wellenlängen der farbigen Grenzstrahlen der Reihe nach wie folgt ausgedrückt, wenn wir die Farbengrenzen durch die Anfangsbuchstaben bezeichnen.

A.R.,	R.O.,	O.Ge.,	Ge.Gr.,	Gr.B.,	B.I.,	I.V.,	A.V.
λ,	$\lambda\left(\frac{8}{9}\right)^z$,	$\lambda\left(\frac{5}{6}\right)^z$,	$\lambda\left(\frac{3}{4}\right)^z$,	$\lambda\left(\frac{2}{3}\right)^z$,	$\lambda\left(\frac{3}{5}\right)^z$,	$\lambda\left(\frac{9}{16}\right)^z$,	$\lambda\left(\frac{1}{2}\right)^z$.

Nach der Farbe der Fraunhofer'schen Strahlen müssen nun offenbar λ und z solche Werthe haben, dass durch sie folgende Bedingungen erfüllt werden.

$$
\begin{array}{ll|ll}
C' < \lambda & & C' > \lambda\left(\frac{8}{9}\right)^z \\
D' < \lambda\left(\frac{8}{9}\right)^z & & D' > \lambda\left(\frac{5}{6}\right)^z \\
E' < \lambda\left(\frac{3}{4}\right)^z & & E' > \lambda\left(\frac{2}{3}\right)^z \\
F' < \lambda\left(\frac{2}{3}\right)^z & & F' > \lambda\left(\frac{3}{5}\right)^z \\
G' < \lambda\left(\frac{3}{5}\right)^z & & G' > \lambda\left(\frac{9}{16}\right)^z \\
H' < \lambda\left(\frac{9}{16}\right)^z & & H' > \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^z.
\end{array}
$$

Dividirt man jede der sechs Ungleichungen der ersten von diesen beiden Reihen durch ihre nebenstehende in der zweiten Reihe, so erhält man die drei Ungleichungen

$$1 < \left(\frac{9}{8}\right)^z, \quad 1 < \left(\frac{16}{15}\right)^z, \quad 1 < \left(\frac{10}{9}\right)^z,$$

von denen die erste und letzte von selbst folgen, wenn die mittlere erfüllt ist. Sie zeigen aber nichts weiter, als dass $z > 0$ sein muss. Dividirt man aber ferner jede Ungleichung jeder von beiden Reihen durch jede der nebenstehenden nachfolgende in der andern Reihe, so ergeben sich folgende dreissig Ungleichungen, von denen die, welche z enthalten, die beigesetzten Werthe von z fordern, die übrigen schon durch die Voraussetzung erfüllt sind.

$\frac{C'}{D'} < \left(\frac{6}{5}\right)^z$; $z > 0,5899$	$\frac{C'}{D'} > 1$
$\frac{C'}{E'} < \left(\frac{3}{2}\right)^z$; $z > 0,5409$	$\frac{C'}{E'} > \left(\frac{32}{27}\right)^z$; $z < 1,2907$
$\frac{C'}{F'} < \left(\frac{5}{3}\right)^z$; $z > 0,5875$	$\frac{C'}{F'} > \left(\frac{4}{3}\right)^z$; $z < 1,0434$
$\frac{C'}{G'} < \left(\frac{16}{9}\right)^z$; $z > 0,7347$	$\frac{C'}{G'} > \left(\frac{40}{27}\right)^z$; $z < 1,0756$
$\frac{C'}{H'} < 2^z$; $z > 0,7262$	$\frac{C'}{H'} > \left(\frac{128}{81}\right)^z$; $z < 1,1007$
$\frac{D'}{E'} < \left(\frac{4}{3}\right)^z$; $z > 0,3885$	$\frac{D'}{E'} > \left(\frac{10}{9}\right)^z$: $z < 1,0609$
$\frac{D'}{F'} < \left(\frac{40}{27}\right)^z$; $z > 0,4899$	$\frac{D'}{F'} > \left(\frac{5}{4}\right)^z$; $z < 0,8630$
$\frac{D'}{G'} < \left(\frac{128}{81}\right)^z$; $z > 0,6888$	$\frac{D'}{G'} > \left(\frac{25}{18}\right)^z$; $z < 0,9595$
$\frac{D'}{H'} < \left(\frac{16}{9}\right)^z$; $z > 0,6880$	$\frac{D'}{H'} > \left(\frac{40}{27}\right)^z$; $z < 1,0072$
$\frac{E'}{F'} < \left(\frac{5}{4}\right)^z$; $z > 0,3621$	$\frac{E'}{F'} > 1$
$\frac{E'}{G'} < \left(\frac{4}{3}\right)^z$; $z > 0,7070$	$\frac{E'}{G'} > \left(\frac{10}{9}\right)^z$; $z < 1,9307$
$\frac{E'}{H'} < \left(\frac{3}{2}\right)^z$; $z > 0,7006$	$\frac{E'}{H'} > \left(\frac{32}{27}\right)^z$; $z < 1,6722$
$\frac{F'}{G'} < \left(\frac{32}{27}\right)^z$; $z > 0,7216$	$\frac{F'}{G'} > 1$
$\frac{F'}{H'} < \left(\frac{4}{3}\right)^z$; $z > 0,7065$	$\frac{F'}{H'} > \left(\frac{16}{15}\right)^z$; $z < 3,1497$
$\frac{G'}{H'} < \left(\frac{6}{5}\right)^z$; $z > 0,4424$	$\frac{G'}{H'} > 1.$

Hieraus ergiebt sich, dass, um allen diesen Ungleichungen Genüge zu leisten, sein muss

$$z > 0{,}7347 \text{ und } < 0{,}8630.$$

Substituirt man nun $z > 0{,}7347$ in den fünf Ungleichungen der ersten der beiden oben gegebenen Reihen, welche z und λ enthalten, und $z < 0{,}8630$ in den sechs Ungleichungen der zweiten Reihe, so kommt, mit Hinzufügung von $\lambda > C'$,

$\lambda > 2422$	$\lambda < 2681{,}1$
$\lambda > 2371{,}6$	$\lambda < 2545{,}6$
$\lambda > 2402{,}8$	$\lambda < 2759{,}9$
$\lambda > 2416{,}6$	$\lambda < 2787{,}9$
$\lambda > 2309{,}8$	$\lambda < 2607{,}5$
$\lambda > 2234{,}2$	$\lambda < 2663{,}3.$

Also muss sein

$$\lambda > 2422 \text{ und } < 2545{,}6.$$

Da nun nach der früheren Messung Fraunhofer's der Strahl B die Wellenlänge 2541 hat, nach den späteren Messungen in dieser Gegend des Spectrums aber die Werthe nur um einige Einheiten kleiner sein können, so darf man annehmen, dass

$$\lambda > 2541 \text{ und } < 2545{,}6.$$

Soll nun z, wie Newton's Exponent $\frac{2}{3}$, ein aus möglichst kleinen Zahlen bestehender Bruch sein, so fallen zwischen die gefundenen Grenzen von z von Werthen dieser Art nur die vier: $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{6}{7}$. Von diesen zeigen sich aber die drei ersten als untauglich. Denn da aus $D' > \lambda\left(\frac{5}{6}\right)^z$ folgt $\lambda < D'\left(\frac{6}{5}\right)^z$, so würde

$$z = \frac{3}{4}, \quad \lambda < 2492{,}9$$

$$z = \frac{4}{5}, \quad \lambda < 2516{,}5$$

$$z = \frac{5}{6}, \quad \lambda < 2530{,}8$$

fordern, welche Werthe mit der Bedingung $\lambda > 2541$ unverträglich sind. Dagegen fordert

$$z = \frac{6}{7}, \quad \lambda < 2542{,}9.$$

Setzt man daher $\lambda = 2542$ und $z = \frac{6}{7}$, so wird allen zwölf anfänglichen Bedingungs-Ungleichungen Gnüge geleistet. Es ergiebt

sich nämlich hieraus folgende Tafel, in welcher die Wellenlängen sich auf Luft beziehen und in der 2ten und 4ten Columne in Hundertmillionteln des Pariser Zolls ausgedrückt sind. Die letzten beiden Spalten geben sie, zur Vergleichung mit Fresnel, in Millionteln des Millimeters an.

Grenzstrahlen.	Wellenlänge.	Fraunhofer's Strahlen.	Wellenlänge.	Milliontel des Millimeters.	
Aeusserstes Roth	2542	. . . .	. . . .	688,1	
		B, roth	2541	. . . .	687,8
		C', roth	2422	. . . .	655,6
Roth — Orange	2297,9	. . . .	. . . .	622,0	
		D', orange	2175	. . . .	588,8
Orange — Gelb	2174,2	. . . .	. . . .	588,6	
		— —	—		
Gelb — Grün	1986,4	. . . .	. . . .	537,7	
		E', grün	1945	. . . .	526,5
Grün — Blau	1795,7	. . . .	. . . .	486,1	
		F', blau	1794	. . . .	485,6
Blau — Indigo	1640,7	. . . .	. . . .	446,2	
		G', indigo	1587	. . . .	429,6
Indigo — Violett	1552,4	. . . .	. . . .	420,1	
		H', violett	1464	. . . .	396,3
Aeusserstes Violett	1403,3	. . . .	. . . .	379,8	

Hier stehen nun sämmtliche Fraunhofer'sche Wellenlängen mit den Wellenlängen der Grenzstrahlen in derjenigen Uebereinstimmung, die durch ihre Farbe gefordert wird. Man kann daher sagen, dass, wenn man in der Newton'schen Analogie statt des Exponenten $\frac{2}{3}$ den Werth $\frac{6}{7}$ setzt, sie mit den Fraunhofer'schen Messungen vereinbar wird, weder ein kleinerer noch ein grösserer Bruchwerth aus einziffrigen Zahlen aber mit jenen Messungen sich verträgt.

Nimmt man mit Struve die Geschwindigkeit des Lichts zu 41549 geogr. Meilen (à 3807,23 Toisen) an, so ergiebt sich folgende Tafel für die Oscillationszahlen in Billionen, der in der letzten Columne diejenigen Werthe beigefügt sind, welche bei der angenommenen Geschwindigkeit aus der Fresnel'schen Tafel für die Grenzstrahlen folgen.

Grenzstrahlen.	Oscillations-zahlen.	Fraunhofer's Strahlen.	Oscillations-zahlen.	Fresnel's Oscillations-zahlen.
Aeusserstes Roth	448,1	. . . .	. . . . .	478,0
		B, roth	448,2	
		C', roth	469,2	
Roth — Orange	495,6	. . . .	. . . . .	517,3
		D', orange	523,6	
Orange — Gelb	523,8	. . . .	. . . . .	539,9
		— —	—	
Gelb — Grün	573,2	. . . .	. . . . .	579,5
		E', grün	585,6	
Grün — Blau	634,2	. . . .	. . . . .	626,6
		F', blau	634,9	
Blau — Indigo	694,2	. . . .	. . . . .	671,7
		G', indigo	717,8	
Indigo — Violett	733,7	. . . .	. . . . .	702,3
		H', violett	776,4	
Aeusserstes Violett	811,6	. . . .	. . . . .	759,5

Die Zahlen der vierten Columne der vorstehenden Tafel, welche allein auf der sichren Basis der Fraunhofer'schen Messungen und der neusten Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichts beruhen, dürften in den Lehr-, Hand- und Wörterbüchern der Physik wohl eher auf eine Stelle Anspruch machen können, als die aus den jedenfalls unvollkommneren Beobachtungen Newton's abgeleiteten Mittelzahlen aus den Oscillationsmengen der Fresnel'schen oder Herschel'schen Grenzstrahlen, welche man zur Zeit meistens allein aufgeführt findet.

Die Untersuchung über die Gültigkeit der Newton'schen Analogie als Gesetz ist hiermit noch nicht abgeschlossen; denn es ist auch durch die vorstehende Nachweisung noch nicht positiv erwiesen, dass den Grenzstrahlen die berechneten Wellenlängen wirklich zukommen. Dazu wäre nöthig, dass ähnliche Messungen wie die Fraunhofer'schen für die dunkeln Linien des Spectrums, welche mit den Grenzen der Farben zusammenfallen, ausgeführt würden. Solche Messungen werden nicht die gleiche Schärfe erreichen können wie die bereits vorliegenden, weil die Farben unmerklich in einander übergehen, ihre Grenzen mehr oder weniger unbestimmt sind, auch nicht, nach Fraunhofer's Abbildung im 5ten Bande der Münchner Denkschriften zu urtheilen, auf alle jene Grenzen dunkle Linien zu fallen scheinen. Allein es wird doch möglich sein, den Ort der Grenzen mit einer für den Zweck zureichenden Genauigkeit mittels der Orte der ihnen benachbarten Linien zu bestimmen und daraus die ihnen

zukommenden Wellenlängen abzuleiten. Alsdann erst kann sich zeigen, wie weit die nach der modificirten Newton'schen Analogie hier berechneten Werthe damit übereinstimmen. Es ist nicht nur möglich, sondern selbst wahrscheinlich, dass noch andre Modificationen jener Analogie sich dann als nothwendig zeigen werden, ja dass sie vielleicht ganz aufgegeben werden muss. Denn die Vergleichung der berechneten Werthe mit Fraunhofer's Abbildung des Spectrums lässt schon jetzt einige Differenzen deutlich erkennen. Die Grenze des Rothen z. B. scheint eine grössere Zahl als 2542 zu fordern, da diese sehr nahe an B liegt. Ferner fällt nach der Berechnung D dicht an die Grenze Orange — Gelb, im Bilde dagegen liegt es näher als dieser der Grenze des Roth und Orange. Besser würde es hier stimmen, für die Wellenlänge des Orange — Gelb statt $\lambda\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{6}{7}}$ anzunehmen $\lambda\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{6}{7}}$ (also der kleinen Terz die grosse zu substituiren), was 2099,5 statt 2174,2 giebt. Dieser Werth, welcher in Zehenmillionteln des Millimeters ausgedrückt = 571 ist, würde auch mit der einzigen bekannten Messung Newton's, die sich gerade auf diese Grenze bezieht, vollständig übereinstimmen, wie dies aus der Fresnel'schen Tafel hervorgeht.

Zum Schluss endlich noch folgende allgemeine Bemerkung. Die Vergleichung der Schwingungszahlen der Farbenstrahlen und Töne lässt sich aus zwei Gesichtspunkten anstellen. Der einfachere ist der, dass man die Quotienten aus den Oscillationszahlen bildet und sie nach den Intervallen der Töne benennt, deren Schwingungen die gleichen oder nahe gleichen Quotienten geben. Nach dieser Auffassung, welche die Young's ist, (vgl. die oben in der Anmerkung S. 58 angeführte Stelle), würden z. B. Fraunhofer's Strahlen BH der kleineren übermässigen Sexte $\frac{125}{72}$, BG der kleinen Sexte, CD dem kleinen ganzen Ton $\frac{10}{8}$, EH der Quarte entsprechen, die äussersten Grenzen des Roth und Violett nach vorstehender Berechnung nahe die grössere kleine Septime $\frac{9}{5}$ geben. Die zweite Ansicht, die wir als die Newton'sche bezeichnen können, geht davon aus, dass die Schwingungsverhältnisse der in den Tonleitern vorkommenden Töne, $\frac{9}{8}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$ u. s. w. sich als Potenzen von 2, dem Schwingungsverhältniss der Octave zum Grundton, betrachten lassen, deren

Exponenten dann $\frac{\lg \frac{9}{8}}{\lg 2}$, $\frac{\lg \frac{6}{5}}{\lg 2}$, $\frac{\lg \frac{5}{4}}{\lg 2}$ u. s. f. sind und (nach Euler) die Grösse der musikalischen Intervalle bestimmen, so dass also, wenn diese durch x_1, x_2, x_3 etc. bezeichnet werden, 2^{x_1}, 2^{x_2}, 2^{x_3} u. s. f. jene Verhältnisszahlen ausdrücken, und das Intervall zwischen Grundton und Octave $\frac{\lg \frac{2}{1}}{\lg 2} = 1$ ist. Betrachtet man nun die äussersten Grenzen des Spectrums als entsprechend dem Grundton und der Octave, so ist ihr Schwingungsverhältniss nicht, wie bei den Tönen, $1:2$, sondern, nach Newton, $1:2^{\frac{2}{3}}$, nach der vorstehenden Modification seiner Analogie, $1:2^{\frac{6}{7}}$. Die Farben, deren Schwingungsverhältnisse zum äussersten Roth durch $2^{\frac{2}{3}x_1}$, $2^{\frac{2}{3}x_2}$, $2^{\frac{2}{3}x_3}$ etc. oder, nach der Modification durch $2^{\frac{6}{7}x_1}$, $2^{\frac{6}{7}x_2}$, $2^{\frac{6}{7}x_3}$ etc. ausgedrückt werden, entsprechen dann der grossen Secunde, kleinen Terz, grossen Terz u. s. w., und diese sind, nach Newton, diejenigen Farbennüancen, in welchen Roth und Orange, Orange und Gelb, Gelb und Grün etc. an einander grenzen. Mag nun übrigens in dem einen oder andern Sinne eine Analogie zwischen Farben und Tönen stattfinden oder nicht, so ist es jedenfalls der Mühe werth, durch neue Messungen nach Fraunhofer's Methode die Wellenlängen, welche den Strahlen der Farbengrenzen zukommen, direct zu bestimmen, und zu untersuchen, ob sich ein gesetzlicher Zusammenhang zwischen ihnen entdecken lässt. Denn es handelt sich hierbei nicht bloss um eine Curiosität, sondern um die Bestätigung oder Berichtigung eines mathematischen Gesetzes, das bisher für begründet gegolten hat und in der Theorie der farbigen Ringe und der Regel für die Mischung der Farben angewandt worden ist, das aber, den Fraunhofer'schen Messungen gegenüber, wie sich im Vorstehenden gezeigt hat, unmodificirt nicht bestehen kann.

SITZUNG AM 18. DECEMBER 1852.

W. Hankel, *über die Messung der atmosphärischen Elektricität.*

Derselbe trug den hauptsächlichsten Inhalt einer Abhandlung über die Messung der atmosphärischen Elektricität vor.

Nach einer Erwähnung der bisher angewandten Verfahrungsarten, der Darlegung ihrer Unvollkommenheiten und Mängel erklärte er zunächst die von ihm angewandte Methode, welche an Bequemlichkeit, Schnelligkeit und Genauigkeit der Messung nichts zu wünschen übrig lässt. Er bedient sich nämlich eines Elektrometers, welches wesentlich mit dem früher von ihm in den Berichten über die Verhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Gesellschaft für 1850 S. 71 bekannt gemachten, übereinstimmt; nur sind alle Dimensionen mit Ausschluss der Länge des Goldblättchens und der Grösse der Polplatten, zwischen welchen das Goldblättchen hängt, sehr verkleinert; auch ist der gläserne Kasten ersetzt durch ein messingenes Gehäuse, welches nur an der vordern und hintern Seite Glas enthält, um das Goldblättchen mit dem Mikroskop beobachten zu können. Die nasse Säule, welche den Polplatten die Elektricität mittheilt, befindet sich in dem hölzernen Fusse des Instrumentes und nimmt sehr wenig Raum ein. Auf diese Weise ist das Instrument sehr leicht tragbar geworden, und mittelst einer kleinen Vorrichtung, welche das untere Ende des Goldblättchens festhält, verträgt es ohne Schaden alle Schwankungen und selbst heftige Stösse. Das Instrument wird, sowohl um es

gegen Unbill der Witterung, als auch gegen elektrische Einflüsse von Seiten des Körpers des Beobachtenden zu schützen, in eine Blechhülle gebracht, welche an der vordern, hintern und oberen Seite durch Deckel verschliessbare Oeffnungen besitzt. Die vordere Oeffnung dient zum Durchgange für den Körper des Mikroskops, die hintere zum Eintritt des Lichtes für die Beleuchtung des Goldblättchens, und die obere zum Durchgange der mehr oder weniger langen Conductoren, welche man auf den Träger des Goldblättchens aufschraubt. Die Messung der atmosphärischen Elektricität geschieht dann sehr einfach auf die Weise, dass man einen blechernen, oben verschlossenen, unten aber offenen Cylinder über den Conductor setzt und dann wieder abhebt. Wird während der Bedeckung des Conductors mit dem Blechcylinder der Conductor abgeleitet, so entsteht beim Abheben desselben in Folge der Vertheilung von Seiten der in der Atmosphäre vorhandenen Elektricität ein Ausschlag des Goldblättchens, der sich durch das Ocularmikrometer des Mikroskops genau messen lässt. Beim Bedecken des Conductors mit dem Blechcylinder kehrt das Goldblättchen wieder an seine Stelle zurück. Bei der Empfindlichkeit des Instrumentes bedarf es keines langen Conductors; es genügt eine Länge von 2 bis drei Zoll, ja selbst noch weniger, je nach der Entfernung der Polplatten und der Kraft der angewandten Säule. Jede einzelne Messung erfordert übrigens, wie man sieht, nur eine sehr kurze Zeit, und es lassen sich daher selbst sehr schnell eintretende Aenderungen in der Stärke und der Art der Elektricität ohne alle Schwierigkeit verfolgen.

Von der Brauchbarkeit des Instrumentes, selbst auf Reisen, hatte sich der Vortragende in den letzten Herbstferien überzeugt, indem er einen Theil derselben während eines Aufenthaltes zu Arnstadt in Thüringen benutzte, um Messungen über atmospärische Elektricität, und namentlich über die Unterschiede in ihrer Stärke je nach der Beschaffenheit des Standpunktes anzustellen. Er theilte die Resultate mehrerer Beobachtungsreihen mit, welche vollkommen genau gleichzeitig an zwei verschiedenen Standpunkten mit zwei einander ziemlich gleichen Instrumenten gemacht waren, deren eines von dem Oberlehrer am Gymnasio zu Arnstadt, Herrn Hoschke, und deren zweites von ihm selbst beobachtet wurde.

Da man nicht darauf rechnen kann, dass die nasse Säule,

bestehend nur aus Kupfer- und Zinkdrähten, welche in kleine mit Wasser angefüllte Gläschen von der Dicke einer Federspule gestellt sind, unverändert ihre Elektricität auf längere Zeit behält, so bedarf es eines Mittels, um die zu verschiedenen Zeiten mit demselben Instrumente angestellten Beobachtungen unter sich vergleichbar zu machen. Diess lässt sich auf folgende Weise erreichen. Die Mitte der Säule wird mit dem Erdboden in Verbindung gesetzt, um den Nullpunkt an dieser Stelle zu erhalten, und der eine Pol mit der einen, der andere mit der andern Polplatte verbunden. Darauf wird die Elektricität erst des einen Poles, und dann ebenso auch des andern zu dem Goldblättchen geleitet, und der dadurch jedes Mal erzeugte Ausschlag gemessen; die durch die Verbindung mit dem positiven und dem negativen Pole entstehenden Ausschläge sind sehr nahe gleich. Das arithmetische Mittel aus ihnen dient dann, um alle Ausschläge auf eine bestimmte Empfindlichkeit zu reduciren, indem die Quadratwurzeln aus den auf diese Weise gewonnenen Ausschlägen ein Maass für die Empfindlichkeit des Instruments, mit welcher unter übrigens gleichen Umständen die Ausschläge wachsen, abgeben. Vorgelegte Versuchsreihen mit Benutzung einer constanten Kette aus 24 Daniell'schen Elementen, deren Zahl nach und nach vermindert wurde, angestellt bestätigen die Richtigkeit des übrigens theoretisch ableitbaren Verfahrens.

Die Wichtigkeit einer genauen Kenntniss der atmosphärischen Elektricität, namentlich rücksichtlich ihrer Vertheilung über die Oberfläche der Erde und ihrer Aenderungen in längeren Zeiträumen erfordert aber, dass auch Beobachtungen an sehr entlegenen Orten, zu sehr verschiedenen Zeiten und mit sehr verschiedenen Instrumenten angestellt, mit einander vergleichbar gemacht werden. Es bedarf also einer Zurückführung der gemessenen Werthe auf ein sogenanntes absolutes Maass. Ein solches lässt sich gewinnen mittelst Messungen an einer Drehwaage, mit deren Ausschlägen die Ausschläge des für die Beobachtung der atmosphärischen Elektricität bestimmten Elektrometers verglichen werden. Der Vortragende hat z. B. eine solche construirt aus einem Waagebalken von 123,16 par. Linien Länge, welcher an seinen Enden zwei Kugeln von 8,8 par. Linien Durchmesser trägt, und mit einem Planspiegel zur Bestimmung seiner Stellung mittelst Fernrohr und Skala, wie bei dem Magnetometer, versehen ist. Jeder dieser Kugeln stehen in einer Richtung senk-

recht auf die Richtung des Balkens in seiner Ruhelage zwei andere Kugeln, deren Entfernung sich beliebig verändern lässt, gegenüber. Während beide Kugeln des Balkens eine bestimmte Elektricität erhalten, wird zweien der festen Kugeln positive, zweien andern aber negative Elektricität mitgetheilt, so dass sie sich in ihren Einwirkungen auf die beweglichen Kugeln unterstützen. Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes des Balkens nebst seinem Zubehör dienen zwei verschiebbare Gewichte. Es ist zur Aufhängung ein ziemlich dicker Stahldraht genommen, um die Schwingungsdauer möglichst abzukürzen, so dass bei der Stellung der Gewichte, wo sie dem Drehpunkte am nächsten sind, die Dauer einer Schwingung nur 47,73 Secunden beträgt. Aus dem Trägheitsmomente und der Schwingungsdauer lässt sich aber der Widerstand, welchen der Stahldraht einer Drehung entgegensetzt, und damit auch die Einwirkung der Elektricität der Kugeln auf einander, welcher diese Drehung des Drahtes das Gleichgewicht hält, in den in der Mechanik auch sonst gebräuchlichen Einheiten, also in sogenannten absoluten Maassen bestimmen.

Durch Vergleichung mit einer solchen Drehwaage lassen sich also allerdings die Ausschläge für solche Elektricität, welche dem Goldblättchen in einer bestimmten Weise mitgetheilt wird, bestimmen; es ist folglich dadurch ein Mittel gegeben, um die Empfindlichkeiten verschiedener Elektrometer ohne unmittelbare Vergleichung mit einander vergleichbar zu machen.

Die atmosphärische Elektricität wirkt aber nur durch Vertheilung auf den Conductor und das Goldblättchen des Elektrometers. Der Ausschlag des letztern hängt aber bei vorausgesetzter gleich grosser Empfindlichkeit des Instrumentes nicht allein von der Stärke der in der Atmosphäre vorhandenen Elektricität, sondern ebenso sehr von der Form und Ausdehnung des Conductors und des Goldblättchens ab. Auf mehrfache Weise z. B. durch geeignete Veränderungen in der Ausdehnung des Conductors sind jedoch Mittel gegeben, um den Einfluss dieser Verhältnisse des Elektrometers zu erfahren, und so die Grösse der Vertheilung auf einen Conductor von bestimmter Form zu erhalten. Es bedarf dann noch einer Festsetzung der Einheit für die Menge der Elektricität, welche ebenfalls auf die schon bekannten Einheiten der Mechanik zurückgeführt werden kann. Dadurch lässt sich die Stärke der atmosphärischen Elektricität

ausdrücken in Werthen, welche angeben, welcher Elektricitätsmenge aus einer bestimmten Entfernung (z. B. der Einheit der Entfernung) wirkend die Elektricität der Atmosphäre am Beobachtungsorte rücksichtlich ihrer Vertheilungswirkung auf einen Conductor gleich kommt.

Lehmann, *Ueber den krystallisirbaren Stoff des Blutes.*

Meine frühere Mittheilung *über die Natur der aus dem Inhalte der farbigen Blutkörperchen hervorgehenden Krystalle* hat von mehrern Seiten nicht vollen Glauben gefunden, da der »Eindruck«, den sie auf manche Forscher machte, nur »der von Mineralstoffen« war. Folgender Bericht meiner weitern über diesen Gegenstand angestellten Versuche möge trotz ihrer Unvollständigkeit vorläufig nur dazu dienen, neue Belege der früher ausgesprochenen Behauptung beizufügen, dass diese Krystalle im Wesentlichen organischer Natur sind.

Was zunächst die Bedingungen der Bildung solcher Krystalle betrifft, so wage ich jetzt um so weniger auf eine nähere Erörterung derselben einzugehen, als die dabei obwaltenden Verhältnisse mir selbst noch nicht ganz durchsichtig geworden sind. Vorläufig nur soviel, dass die Verdunstung, welche man nach ihrer Entstehungsweise unter dem Deckplättchen für ein wesentliches Moment ihrer Bildung halten musste, ohne allen Einfluss auf die Genesis der Krystalle ist. Im Gegentheil ist gerade die Verdünnung des Bluts mit Wasser ein nicht unwichtiges Mittel zur Herbeiführung der Krystallisation.

Hätte auch nicht die directe Analyse der Krystallsubstanz ihre grosse Armuth an Mineralstoffen erwiesen, so würden schon die grossen Mengen aus dem Blute ausscheidbarer, krystallinischer Materie gegen deren mineralische Natur sprechen. In folgenden Fällen, wo ich unter mehrfacher Modification der Bedingungen die Krystallisation herbeiführte, erhielt ich bei quantita-

tiver Bestimmung der Krystallmengen folgende Zahlen an vollkommen trockner Substanz:

1)	15,25 gr.	Meerschweinchenblut lieferten	= 0,2428 gr.	oder	1,592 %
2)	24,56 ,,	,, ,,	= 0,9860 ,,	,,	4,106 %
3)	16,54 ,,	,, ,,	= 0,9105 ,,	,,	5,501 %
4)	16,00 ,,	,, ,,	= 1,0273 ,,	,,	6,421 %
5)	16,77 ,,	,, ,,	= 1,1792 ,,	,,	7,031 %
6)	18,38 ,,	,, ,,	= 1,1937 ,,	,,	6,494 %
7)	21,90 ,,	,, ,,	= 1,2610 ,,	,,	5,758 %.

Die Verschiedenheit dieser Zahlen rührt lediglich von der Verschiedenheit der Bedingungen her, unter welchen in den einzelnen Fällen die Krystallbildung herbeigeführt wurde. Sieben Theile krystallisabeln Stoffs in 100 Th. Blut dürfte aber noch keineswegs die höchste Zahl sein; so viel geht indessen selbst aus diesen Bestimmungen hervor, dass jene Substanz einer der Hauptbestandtheile des Bluts und insbesondere der Blutkörperchen ist. Wenn aber die äussern Bedingungen einen so sichtlichen Einfluss auf die Menge der sich ausscheidenden Krystalle ausüben, so darf man ihre Bildung doch nicht einer Zersetzung im gewöhnlichen Sinne des Wortes zuschreiben; denn in der grossen Mehrzahl der Fälle war die Bildung der Krystalle bereits eine Stunde nach Tödtung des Thieres vollendet.

Um zunächst festen Boden für fernere Untersuchungen zu gewinnen, habe ich mich bei den quantitativen Bestimmungen zunächst auf das Blut der Meerschweinchen beschränkt. Nebenbei sei hier bemerkt, dass das Blut aus Carotiden und Jugularvenen der durch Aether ein wenig betäubten Thiere gesammelt und 3,7 bis 4,3 % ihres Körpergewichts an Blut erlangt wurde.

Was die Form der Krystalle betrifft, so bilden sich zwar, wie bekannt, aus dem Meerschweinchenblute gewöhnlich Tetraeder; indessen erscheinen zuweilen auch Oktaeder und andre Formen des regulären Systems. Ihre Farbe ist sich nicht vollkommen gleich; zuweilen ist sie etwas dunkler, zuweilen heller roth; in seltnern Fällen habe ich sie fast farblos gesehen. Werden die Krystalle längere Zeit unter Wasser bei Luftabschluss aufbewahrt, so pflegen sie eine violette Farbe anzunehmen. An Aether und Alkohol geben die Krystalle sehr wenig ab (nicht ganz 2 %). In Wasser sind sie schwer löslich; wie aus

folgenden Bestimmungen hervorgeht, löst sich 1 Th. trockene Krystallsubstanz ungefähr in 597 Th. Wasser.

1) 42,232 gr.	gesättigt. Lösung	enthielten	0,0712 gr.	od.	0,168 %	fest. Subst.
2) 52,638 ,,	,,	,,	0,0842 ,,	,,	0,160 %	,, ,,
3) 15,672 ,,	,,	,,	0,0265 ,,	,,	0,169 %	,, ,,
4) 15,780 ,,	,,	,,	0,0245 ,,	,,	0,155 %	,, ,,
5) 13,122 ,,	,,	,,	0,0243 ,,	,,	0,184 %	,, ,,

Durch Alkohol werden die Krystalle in Wasser unlöslich, behalten aber ihre Form ziemlich bei; nur erscheinen ihre Flächen nicht mehr ganz plan; fast ebenso verhalten sie sich bei allmähligem Erhitzen bis 100°. Solche coagulirte Krystalle waren es jedenfalls, die Reichert auf der Decidua trächtiger Meerschweinchen gefunden hat. Denn abgesehen davon, dass ich im frischen Uterus solcher trächtigen Thiere (gewiss 20 derselben habe ich untersucht) niemals Krystalle beobachtet habe, so wie auch Bischoff nicht (seiner Schrift über das Meerschweinchenei nach zu urtheilen): so stimmen auch, wie schon Kunde nachgewiesen, die Eigenschaften der löslichen Blutkrystalle nicht mit den von Reichert angeführten Eigenschaften jener Uteruskrystalle überein. Untersucht man jedoch die mit Alkohol behandelten Krystalle mikroskopisch und mikrochemisch, so findet man an ihnen alle die merkwürdigen, von Reichert angeführten Qualitäten. In verdünnter Essigsäure z. B. quellen sie so auf, dass ihr linearer Durchmesser sich um das 3– bis 4fache vergrössert; durch Auswaschen oder Neutralisiren der Säure gehen sie auf ihr früheres Volumen zurück. Es sind also gewissermassen Afterkrystalle, entstanden durch Coagulation der ursprünglich löslichen, krystallisirten Substanz. Reichert mag daher den Uterus und das Ei von Meerschweinchen untersucht haben, welches einige Zeit in Spiritus gelegen hatte. Er fand die Krystalle ziemlich gefärbt, da in der That durch die Coagulation (mehr durch Alkohol, als durch siedendes Wasser) jene Krystalle bedeutend dunkler werden.

Die Krystallsubstanz ist ausserordentlich leicht zersetzbar, und zwar ebensowohl wenn sie vollkommen aufgelöst ist, als wenn sie unter Wasser bei Luftzutritt aufbewahrt wird. Lässt man das frischbereitet hellziegelrothe Krystallsediment 24 bis 48 St. bei mittlerer Temperatur an der Luft stehen, so wird es allmählig kirschroth, schmutzigblauroth und fast schwarz, worauf es zu zerfliessen und sich in der darüber stehenden Flüssig-

keit mit dunkelbraunrother Farbe aufzulösen beginnt. Waren die Krystalle jedoch nicht mehr mit andern Blutbestandtheilen gemengt, und bestand die darüber stehende Flüssigkeit nur aus der Lösung reiner Krystalle, so bleiben sie unter Wasser oft 8 Tage lang unverändert, bei Luftabschluss noch länger; sie erhalten sich da oft 9 Monate lang, wie mikroskopische Präparate derselben darthun, die in dieser Zeit keine andere Veränderung als jenes Violettwerden erlitten haben. In dem ersteren Falle mag daher wohl ein andrer leichter zersetzbarer Blutbestandtheil als Ferment auf sie wirken, was mit der von mir früher gemachten Beobachtung übereinstimmt, dass frisches Blut oft schon 6 St., nachdem es gesammelt, bei mittlerer Temperatur im Vacuo Schwefelwasserstoff entwickelt. Eine Gasentwicklung ist übrigens bei jener Umwandlung der Krystalle nicht zu beobachten, weder im Grossen noch bei der mikroskopischen Untersuchung; eine Sauerstoffabsorption vermochte ich bis jetzt nur zu beobachten, wenn den Krystallen viel andre Blutbestandtheile beigemengt waren.

Die durch das Mikroskop wahrnehmbaren morphologischen Veränderungen, welche die Krystalle bei ihrer chemischen Umwandlung erleiden, zeigen sich zunächst in einer Verminderung ihrer sonst so scharfen Contouren; dabei wird die lebhafte Farbe meist dunkler, sie reflectiren und brechen das Licht weniger stark; zwar bemerkt man meist noch immer ihre tetraedrische Form, doch werden einzelne Kanten krumm; der ganze Krystall erscheint endlich wie eine hyaline, lockre, gallertartige Masse, die ziemlich viel Klebrigkeit zeigt, eine Eigenschaft, welche den frischen unversehrten Krystallen gänzlich abgeht.

Natürlich unterliegt die Krystallsubstanz auch der Zersetzung, wenn sie sich in völliger Auflösung befindet; jedoch gilt auch hier, dass eine reine Lösung weit langsamer diesem Processe unterliegt, als eine solche, die noch andre Blutbestandtheile beigemengt enthält. Immer beginnt die Zersetzung von der Oberfläche der Flüssigkeit, was leicht daraus zu ersehen ist, dass die reine Krystalllösung, welche eine Pfirsichblüthfarbe zu haben pflegt, zunächst von der Oberfläche her dunkelroth und minder durchsichtig wird, bis endlich die ganze Flüssigkeit diese Eigenschaften angenommen hat. Diese nicht geringe Zersetzbarkeit der Krystallsubstanz, wenn sie gelöst ist, war auch der Grund, weshalb von mir erst mancher vergebliche Versuch angestellt werden

musste, ehe die Lösungsfähigkeit der krystallisirbaren Materie in oben mitgetheilter Weise ermittelt wurde; denn sehr oft fand ich weit mehr feste Substanz in Lösung, als oben angegeben; es zeigten sich dabei die erheblichsten Differenzen, die nur einem verschiedenen Grade bereits eingetretener Umwandlung zugeschrieben werden konnten.

Die wässrige Lösung der reinsten Krystalle, welche übrigens keine Reaction auf Pflanzenfarben zeigt, ist in der Hitze gerinnbar. Bei + 62° *C* fängt die Flüssigkeit an, zu opalisiren, bei + 63°,5 ist die Coagulation vollendet. Gleich den bekannten, coagulirten Proteïnkörpern ist das Coagulum schwer zu filtriren.

Durch Aether wird die wässrige Lösung nicht coagulirt; mit dem gleichen Volumen absoluten Alkohols versetzt, wird die Flüssigkeit nur opalisirend.

Durch kalte concentrirte Salpetersäure werden die Krystalle dunkel, ja fast schwarz gefärbt; beim Erwärmen lösen sie sich jedoch, erst gelb werdend, ziemlich leicht zu einer gelben Flüssigkeit auf. Die wässrige Lösung der Krystalle giebt mit Salpetersäure eine sehr bedeutende, bräunliche, flockige Fällung.

Salzsäure und Schwefelsäure bewirken, gleich der Essigsäure, in der wässrigen Lösung keine Trübung, wohl aber verwandeln sie ihre Pfirsichblüthfarbe in ein blasses Braungelb. Die trocknen Krystalle werden von concentrirter Salzsäure und Schwefelsäure nicht gelöst, sondern backen zu einer schwärzlichen, klebrigen Masse zusammen.

In Essigsäure löst sich der krystallisirbare Stoff sehr leicht mit gelber Farbe auf; aus dieser Lösung wird er durch gelbes so wie rothes Blutlaugensalz in Flocken präcipitirt. Bei Neutralisation der essigsauren Lösung scheidet sich ein schmutzig blassgelber Niederschlag aus.

Aetzkali wandelt blos die lichtrothe Farbe der Lösung in ein schmutziges Gelb um, ohne sonst eine sichtliche Veränderung zu bedingen. In concentrirter Kalilauge sind die Krystalle unlöslich, dagegen lösen sie sich sehr leicht in Aetzammoniak und zwar zu einer pfirsichblüthrothen Flüssigkeit auf; diess ist daher das einzige Lösungsmittel nächst Wasser, welches die Farbe der gelösten Krystalle nicht verändert. Aus der ammoniakalischen Lösung wird durch Essigsäure die Substanz in Flocken präcipi-

tirt und zwar schon, wenn die Flüssigkeit bei allmähligem Säurezusatz noch alkalisch reagirt.

Chlorgas entfärbt die Flüssigkeit fast augenblicklich und präcipitirt weisse Flocken. Jodwasser ändert nur die Farbe der Flüssigkeit.

Salmiak, gelbes und rothes Blutlaugensalz (d. h. ohne Essigsäurezusatz), Chlorkalium, Chlorbaryum und selbst neutrales essigsaures Bleioxyd lassen die Lösung völlig unverändert. Basisch essigsaures Bleioxyd bewirkt nur eine Opalescenz, während durch Zusatz von Aetzammoniak schmutzigweisse Flocken gefällt werden.

Salpetersaures Silberoxyd bewirkt eine kaum bemerkbare Opalescenz.

Quecksilberchlorid bewirkt blos im Ueberfluss zugesetzt einen weisslichen Niederschlag, der sich in etwas mehr Krystalllösung sehr leicht wieder auflöst; dabei bleibt die Farbe der Flüssigkeit unverändert, während andre Metallverbindungen, wie Eisenchlorid und Zinnchlorür, die auch keine Fällungen bewirken, wenigstens die Farbe mehr in Gelb umwandeln.

Schwefelsaures Kupferoxyd scheidet erst nach einiger Zeit einen blassgrünlichen Niederschlag aus.

Salpetersaures Quecksilberoxydul so wie doppeltchromsaures Kali bewirken erhebliche, weisse Niederschläge. Das Millon'sche Reagens gab die den Proteïnkörpern eigne Reaction.

Während sonach die Krystallsubstanz in dem Verhalten gegen einige Reagentien die auffallendste Analogie mit den eiweissartigen Stoffen zeigt, unterscheidet sie sich doch durch die Indifferenz gegen andre Reagentien von jeder bekannten Proteïnverbindung.

Auch das Verhalten in der Hitze unterscheidet diesen Körper von den meisten bekannten eiweissartigen Stoffen; wie diese fängt er zwar auch an, bei 160 bis 170° *C.* sich zu zersetzen; er entwickelt auch den sogenannten hornartigen Geruch, jedoch in weit mindern Grade als diese; er bläht sich ebenfalls stark auf, entwickelt aber soviel beim Entzünden stark leuchtender Dämpfe, als ob Fett verbrannt würde.

Viel vergebliche Versuche sind von mir über den Gehalt dieser Substanz an Krystallwasser angestellt worden; da die Krystalle nicht luftbeständig sind, so lässt sich schwer be-

stimmen, wann sie gerade lufttrocken sind und doch nicht bereits einen Theil ihres Krystallwassers verloren haben; das Mikroskop nützt hierbei wenig, da einerseits das zur Wasserermittlung bestimmte Material meist sehr ungleich abgetrocknet ist, und andrerseits der Grad der Verwitterung der Krystalle unter dem Mikroskop ohne Anwendung von Wasser schwer zu erkennen ist. Zwar erhielt ich in zwei völlig übereinstimmenden Versuchen 19,9 % als Wassergehalt der lufttrocknen Krystalle; doch schwankt derselbe mehrern andern Versuchen nach zwischen 15 und 16 %. Bemerkenswerth ist übrigens, dass die im Vacuo über Schwefelsäure ausgetrocknete Substanz im Luftbade bei + 120° *C.* nichts mehr an Gewicht verliert. Dagegen ziehen die vollkommen ausgetrockneten Krystalle an mässig feuchter Luft bei ungefähr + 15° *C.* im Mittel von 5 (zwischen 11,114 und 11,273 schwankenden) Versuchen 11,195 % Wasser an; demnach würde die lufttrockne Substanz noch 10,06 % hygroskopisches Wasser enthalten.

Was endlich den Gehalt der Substanz an Mineralbestandtheilen betrifft, so ist derselbe bis zu einem gewissen Grade variabel, ein Verhältniss, welches von dem verschiedenen Eisengehalte oder vielmehr von der Verschiedenheit des Gehalts der Krystalle an rothem Pigment abhängt. Die Resultate der quantitativen Bestimmungen sind folgende:

1) 1,5380 gr. tr. Subst. hinterliess. 0,0195 gr. od. 1,269 % lichtgelbrother, lockrer Asche.
2) 0,5225 „ „ „ „ 0,0045 „ „ 0,861 % weisslichgrauer, „ „
3) 0,2620 „ „ „ „ 0,0023 „ „ 0,878 % „ „ „
4) 0,3379 „ „ „ „ 0,0041 „ „ 1,213 % gelblicher, „ „
5) 0,9410 „ „ „ „ 0,0107 „ „ 1,137 % „ „ „
6) 0,7745 „ „ „ „ 0,0090 „ „ 1,162 % „ „ „
7) 0,6588 „ „ „ „ 0,0049 „ „ 0,744 % grauer, „ „
8) 0,6851 „ „ „ „ 0,0055 „ „ 0,803 % „ „ „

Diese Asche enthält zuweilen gegen 48 % Eisenoxyd neben Phosphaten; der lösliche Theil derselben ist ohne Reaction auf Pflanzenfarben und enthält weder kohlensaure Alkalien noch Chlornatrium oder Chlorkalium.

E. H. Weber, *Ueber den Raumsinn und die Empfindungskreise in der Haut und im Auge.*

Der Raumsinn ist ein besonderer Sinn, aber nicht ein Specialsinn, sondern ein Generalsinn.

Aus meinen Untersuchungen über den Tastsinn*) hat sich ergeben, dass wir der ganzen Haut und der Schleimhaut in der Mundhöhle, am Gaumenvorhange, am oberen Theile des Rachens, so wie auch am Eingange in die Nasenhöhle, zwei qualitativ verschiedene Empfindungen verdanken, Druckempfindungen und Temperaturempfindungen, die uns kein anderer Theil unsers Körpers verschaffen kann,**) dass aber die hierzu dienenden Nerven hinsichtlich ihrer Endigung in der Haut und im Gehirn auf eine solche Weise geordnet sind, dass jene Empfindungen zugleich dazu benutzt werden, in uns

---

*) *E. H. Weber, De subtilitate tactus diversa in diversis partibus sensui huic dicatis programmata XVII. Lipsiae* 1829—1834. 4.

Ueber die Tastorgane als die allein fähigen um uns die Empfindung von Wärme, Kälte und Druck zu verschaffen. Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1847. 8. p. 358.

Ueber die Umstände, durch welche man geleitet wird, die Empfindungen auf äussere Objecte zu beziehen. Berichte der Königl. Sächs. Ges. der Wissensch. Leipzig 1848. 8. p. 226.

Die Lehre vom Tastsinne und Gemeingefühle, auf Versuche gegründet für Aerzte und Philosophen. Braunschweig 1849. 8. bei Vieweg. (Besonderer Abdruck aus Wagner's Handwörterbuch der Physiologie, Art. Tastsinn.)

Annotationes anatomicae et physiologicae. Programmata collecta. Fasciculi tres. Lipsiae apud Köhler 1851. 4. *p.* 44—175.

**) Durch meine in der oben genannten Abhandlung angeführten Beobachtungen und Experimente habe ich bewiesen, dass wir die Empfindung der Wärme, der Kälte und des Drucks nur der Haut und denjenigen Theilen der Schleimhaut verdanken, die, wie die Haut, mit dem Tastsinne versehen sind und dass uns also namentlich weder die Gedärme, noch die Muskeln, noch die mit dem Geruchsinn versehene Schleimhaut der Nase, noch die grossen Nervenstämme, wenn kalte Körper auf sie einwirken, oder ein Druck auf sie ausgeübt wird, Temperaturempfindungen oder Druckempfindungen verschaffen, dass aber in ihnen durch solche Einflüsse wohl Schmerzempfindungen entstehen können.

Vorstellungen von den räumlichen Verhältnissen der Dinge zu erwecken.

Ich habe Methoden gefunden, die Schärfe des Drucksinns, des Temperatursinns und des Raumsinns in verschiedenen Regionen unserer Haut zu messen und zu vergleichen.

Eines der überraschendsten Resultate dieser Vergleichung ist dieses, dass der Drucksinn und der Temperatursinn in allen Regionen der Haut ziemlich dieselbe Feinheit oder Schärfe haben, dass dagegen der Raumsinn in manchen Gegenden unserer Haut mehr als 50mal schärfer ist als in andern, und dass er überhaupt in den verschiedenen Gegenden der Haut von sehr verschiedener Feinheit ist.

Hieraus folgt, dass das, was ich mit dem Namen Raumsinn bezeichne, nicht mit dem Drucksinne oder mit dem Temperatursinne identisch sei. Denn wäre das der Fall, so müsste in denselben Theilen, in welchen der Raumsinn 50mal feiner ist als in andern, auch der Drucksinn und der Temperatursinn diesen höheren Grad von Vollkommenheit haben und überhaupt dieselben ungleichen Grade von Ausbildung zeigen. Jene Thatsache, dass der Raumsinn in manchen Theilen sehr, in andern Theilen viel weniger ausgebildet ist und dass er in den letzteren auch durch die grösste Uebung nicht ausgebildet werden kann, während in den nämlichen Theilen der Druck- und Temperatursinn einen fast gleichen Grad von Vollkommenheit besitzen, beweist, dass es für den Raumsinn besondere Einrichtungen geben müsse, die von den Einrichtungen, die sich auf den Drucksinn und Temperatursinn beziehen, unabhängig sind. Dieses bestätigt sich auch dadurch, dass der Raumsinn auch in einem zweiten ganz andern Sinnorgane, nämlich im Auge, und zwar im höchsten Grade, ausgebildet ist. Hier dienen die Licht- oder Farbenempfindungen dazu, uns zugleich Gestalten, Entfernungen und andere räumliche Verhältnisse wahrnehmen zu lassen. Dagegen fehlt in den Organen des Gehörs und des Geruchs jene dem Raumsinne dienende Einrichtung und wir nehmen daher durch die Töne und Gerüche keine Gestalten wahr. Fehlte sie auch im Auge und in der Haut, so würden wir daselbst Farben, Wärme und Kälte und Druck empfinden, wie wir die Töne empfinden, d. h. ohne zugleich Gestalten wahrzunehmen. Der Raumsinn ist daher für einen besonderen Sinn zu halten, aber nicht für einen Sinn, der uns eine besondere, qualitativ verschiedene, Art von Empfindungen

verschafft und zu diesem Zwecke einen besonderen Sinnesnerven besitzt, sondern für einen Sinn, der auf Einrichtungen beruht, die in mehreren anderen Sinnorganen zugleich mit angebracht sind und die, wie wir sehen werden, auf der besonderen Anordnung der Nervenfäden hinsichtlich ihrer peripherischen und centralen Endigung beruhen, mögen nun diese Fäden uns die Empfindung von Druck, Temperatur oder von Licht verschaffen.

Da nun die Wahrnehmungen des Raums und der räumlichen Verhältnisse zu den allgemeineren Wahrnehmungen gehören und sich dadurch wesentlich von den Wahrnehmungen von Farben, Temperaturen, Druckempfindungen, Tönen und Gerüchen unterscheiden, die auf der Empfindung einer besonderen Classe von Bewegung beruhen, welche auf unsere Nerven wirkt, so kann man wohl den Raumsinn einen Generalsinn nennen, zum Unterschiede von den genannten Specialsinnen.

Folgende Versuche sind geeignet, uns eine Vorstellung über die verschiedene Feinheit des Raumsinns in verschiedenen Regionen der Haut zu verschaffen.

Der Raumsinn in der Haut.

Versuche, um die Feinheit oder Schärfe des Raumsinns auf verschiedenen Theilen der Haut zu bestimmen.

I. Indem man einen Menschen den Ort anzeigen lässt, wo man seine Haut berührt oder so eben berührt hat.

Wenn man das abgerundete Ende eines Stäbchens, z. B. einer dicken Stricknadel, mit feinem Kohlenpulver schwärzt, an ihrem oberen Ende ein Gewicht befestigt und dieselbe auf verschiedenen Theilen der Haut eines Menschen senkrecht aufstellt und durch ihr Gewicht einen Eindruck hervorbringen lässt, so findet man, dass derselbe den Ort der Berührung ohne ihn zu sehen nicht an allen Theilen genau anzeigen kann, sondern nur an denjenigen, welche mit einem feinen Raumsinne versehen sind.

Zeigt er den Ort, wo er soeben berührt worden zu sein glaubt, mit einer kurzen Sonde an, so fühlt er oft selbst, dass die Sonde von dem Orte der Berührung noch ziemlich weit entfernt ist und dass er sich demselben in einer gewissen Richtung

noch mehr nähern könne. Nachdem er nun demselben näher gekommen ist, entfernt er sich oft wieder von ihm bei dem Bemühen, ihm noch näher zu kommen. Bestimmt man nun aber mit einem Cirkel und Maassstabe, wie weit der Beobachter von dem gesuchten (durch einen schwarzen Punkt bezeichneten) Orte entfernt bleibt, wenn er demselben am nächsten zu sein glaubt, und nimmt aus vielen solchen Bestimmungen das Mittel, so wird man finden, dass er desto weiter von ihm entfernt bleibt, je unvollkommner der Raumsinn in dem Theile der Haut ist, an welchem der Versuch gemacht wird. Wenn die Stricknadel bei mir in dem Augenblicke weggenommen wurde, wo ich den Ort der Berührung zu bestimmen suchte, so näherte ich mich mit der Sonde demselben ungefähr

bis auf 7,0 Par. Lin. auf der Mitte der vorderen Seite des Oberschenkels,
,, ,, 3,8 ,, ,, auf der Mitte der Volarseite des Vorderarmes,
,, ,, 2,9 ,, ,, auf der Mitte des Handrückens,
,, ,, 1,9 ,, ,, auf der Mitte der Hohlhand,
,, ,, 0,5 ,, ,, auf der Volarseite der Fingerspitzen,
,, ,, 2,8 ,, ,, auf der Stirn,
,, ,, 2,4 ,, ,, am Kinn,
,, ,, 0,5 ,, ,, an den Lippen.

An der Volarseite der Fingerspitzen und an den Lippen trifft man sehr oft den schwarzen Fleck selbst, den die Stricknadel gemacht hat, als sie auf die Haut den Druck ausübte.

Wenn man bei verschiedenen Menschen solche Versuche anstellt, so findet man zwar, dass bei dem Einen der Raumsinn feiner, bei dem Andern weniger fein ist, aber immer ist er bei demselben Menschen an den nämlichen Theilen feiner, an welchen er es bei Andern ist und umgekehrt. Bei der soeben angeführten Methode dauert der auf unsere Haut ausgeübte Druck nicht fort, während wir den Ort der Berührung zu bestimmen bemüht sind. Wir werden nur von dem fortdauernden Gefühle des gehabten Eindrucks oder von der Erinnerung daran geleitet. Man könnte daher glauben, dass wir den Ort, wo der Druck auf unsere Haut ausgeübt wird, überall genau würden anzeigen können, wenn derselbe fortdauerte. Das ist aber nicht der Fall. Auch wenn die Stricknadel auf der Haut stehen bleibt, irrt man sich doch über den Ort der Berührung, sobald man nur verhütet, dass der Beobachter mit seiner Sonde nicht an der Stricknadel anstossen kann, indem man

dieselbe in dem Augenblicke, wo er daran anstossen würde, entfernt und sie dann auf dem schwarzen Punkte, den sie gemacht hat, sogleich wieder aufstellt. Die Bestimmung des Ortes wird bei der Anwendung dieser letzten Methode zwar etwas genauer, aber nur wenig.

II. Versuche, um die Feinheit des Raumsinns an verschiedenen Theilen der Haut zu bestimmen, indem man beobachtet, um wie viel die Spitzen eines in gewissem Grade geöffneten Cirkels dem Gefühle nach von einander abzustehen scheinen, wenn verschiedene Gegenden der Haut damit berührt werden, und indem man die Richtung der Linie anzugeben sucht, durch welche man sich beide Spitzen verbunden denken kann.

Wenn unsere Haut, ohne dass wir es sehen, gleichzeitig und gleich stark an zwei Orten, die einander nicht zu nahe sind, berührt wird, so empfinden wir zwei Berührungen und einen Zwischenraum zwischen den berührten Theilen der Haut. Ist auch der Abstand der uns berührenden Cirkelspitzen derselbe, so scheint er uns doch an verschiedenen Gegenden der Haut sehr verschieden gross zu sein, nämlich sehr gross, da, wo der Raumsinn sehr fein ist, und klein, oder sogar unwahrnehmbar, wo er stumpf ist, und also gross im Gesichte, an der Hohlhand und im Hohlfusse, klein aber am Rumpfe, an den Oberschenkeln und Oberarmen. Der Kopf übertrifft den Rumpf, die Hände und Füsse übertreffen den übrigen Theil der Arme und Beine hinsichtlich der Feinheit des Raumsinns. Das Gesicht hat einen feineren Raumsinn als der behaarte Theil des Kopfes, die Hohlhand und der Hohlfuss haben einen viel feineren Raumsinn als der Rücken der Hand und des Fusses, und auch am Rumpfe ist der Raumsinn auf der Bauchseite etwas feiner als auf der Rückenseite. Den allerfeinsten Raumsinn unter allen Theilen des Körpers besitzt die Zungenspitze, von da nimmt die Feinheit desselben nach allen Seiten zu ziemlich schnell mehr und mehr ab, so dass sie am Zahnfleische, am Gaumen und an der Wurzel der Zunge sehr gering ist. Im Gesichte sind die Lippen der empfindlichste Mittelpunkt, von welchem aus der Raumsinn nach allen Seiten zu allmählig an Feinheit abnimmt, so dass er vorzüglich schnell nach den Aesten der unteren Kinnlade und überhaupt nach dem Halse zu stumpfer wird. An den Armen und Beinen sind es

die Volar- und Plantarseite des letzten Gliedes der Finger und Zehen, oder kurz die Finger- und Zehenspitzen, welche die empfindlichste Region dieser Glieder bilden. Mit jedem Gliede nach der Mittelhand zu nimmt die Feinheit des Raumsinns etwas ab, und so vermindert sich dieselbe auch noch ferner nach dem Arme und Rumpfe zu. Eine sehr schnelle Abnahme der Feinheit des Raumsinns bemerkt man da, wo an der Grenze der Hohlhand die Gefühlswärzchen aufhören in Linien geordnet zu sein. Hand und Fuss verhalten sich hierin gleich, aber der Raumsinn in der Hand und im Arme ist beträchtlich feiner als der im Fusse.

Wie weit die Cirkelspitzen von einander entfernt sein müssen, damit die beiden Eindrücke, die sie durch eine gleichzeitige und gleich starke Berührung der Haut hervorbringen, nicht zu einem einzigen Eindrucke verschmelzen, sondern als zwei Eindrücke, welche durch einen Zwischenraum von einander getrennt sind, wahrgenommen werden, bestimmt man am besten durch einzelne an bestimmten Theilen der Haut angestellte Versuche, die man an allen Theilen der Haut eines zuverlässigen und geübten Beobachters ausführen lässt, und zwar in geringer Zahl auf einmal, damit er nicht ermüde, denn die Ermüdung bringt falsche Resultate hervor, und in längeren Zwischenräumen der Zeit vielmal wiederholt, um sicher zu werden.*)

In der folgenden Tabelle habe ich die Resultate vieler und zu verschiedener Zeit von mir an meinem eigenen Körper gemachter Beobachtungen zusammengestellt und in Pariser Linien

*) Vor Täuschung bewahrt man sich dadurch, dass man den Beobachter nicht nur bestimmen lässt, ob er zwei Berührungen fühle, wenn er gleichzeitig und gleich stark mit zwei von einander entfernten Cirkelspitzen berührt wird, oder ob er nur eine empfinde (denn eine solche Angabe lässt sich nicht controlliren), sondern dass man ihn auch bei verschlossenen Augen bestimmen lässt, ob er mit einer oder mit zwei Cirkelspitzen berührt werde, und welche Lage die beiden Cirkelspitzen auf der Haut haben, d. h. welche Richtung die die Cirkelspitzen verbindende Linie im Vergleich zur Längsachse der Glieder oder des Körpers hat, und ob also die Cirkelspitzen an einem Gliede quer oder der Länge nach liegen. Glaubt er auch dann einen Abstand zu empfinden, wenn er mit einer Cirkelspitze berührt wird, fühlt er bei beiden Versuchen den Unterschied nicht deutlich und giebt er die Richtung der Cirkelspitzen falsch an, so darf man annehmen, dass er sich nur einbilde, dass er den Abstand der Cirkelspitzen von einander empfinde. Es versteht sich von selbst, dass Niemand ohne die Unterstützung eines Andern beweisende Versuche dieser Art machen könne.

angegeben, wie weit die meine Haut gleichzeitig und gleich stark berührenden Spitzen eines Cirkels von einander entfernt sein müssten, damit ich zwei Berührungen empfände und unterscheiden könnte, ob die Cirkelspitzen in der Längsrichtung oder in der queren Richtung meines Körpers und meiner Glieder lägen.

Theil der Haut.	Abstand der Cirkelspitzen.
Zungenspitze	½ Par. Lin.
Volarseite des letzten Fingerglieds	1 ,, ,,
Rother Theil der Lippen	2 ,, ,,
Volarseite des 2ten Fingerglieds	2 ,, ,,
Dorsalseite des letzten Fingerglieds	3 ,, ,,
Nasenspitze	3 ,, ,,
Volarseite an den *capitulis ossium metacarpi*	3 ,, ,,
Rücken der Zunge, 1 Zoll weit von der Spitze in der Mitte	4 ,, ,,
Ebenda am Rande	4 ,, ,,
Am nicht rothen Theile der Lippen	4 ,, ,,
Am Metacarpus des Daumens	4 ,, ,,
Plantarseite der grossen Zehe am letzten Gliede	5 ,, ,,
Rückenseite des 2ten Glieds der Finger	5 ,, ,,
Backen	5 ,, ,,
Aeussere Oberfläche des Augenlids	5 ,, ,,
Mitte des harten Gaumens	6 ,, ,,
Haut auf dem vorderen Theile des Jochbeins	7 ,, ,,
Plantarseite am Mittelfussknochen der grossen Zehe	7 ,, ,,
Rückenseite des 1sten Glieds der Finger	7 ,, ,,
Rückenseite der *capitula ossium metacarpi*	8 ,, ,,
Innere Oberfläche der Lippen nahe am Zahnfleische	9 ,, ,,
Haut am hinteren Theile des Jochbeins	10 ,, ,,
Unterer Theil der Stirn	10 ,, ,,
Hinterer Theil der Ferse	10 ,, ,,
Behaarter unterer Theil des Hinterhaupts	12 ,, ,,
Rücken der Hand	14 ,, ,,
Hals unter der Kinnlade	15 ,, ,,
Scheitel	15 ,, ,,

Theil der Haut.	Abstand der Cirkelspitzen.
Kniescheibe und Umgegend	16 Par. Lin.
Kreuz	18 ,, ,,
Auf dem *Glutaeus*.	18 ,, ,,
Oberer und unterer Theil des Unterarms .	18 ,, ,,
Oberer und unterer Theil des Unterschenkels	18 ,, ,,
Fussrücken in der Nähe der Zehen . . .	18 ,, ,,
Haut auf dem Brustbeine	20 ,, ,,
Haut am Rückgrate in der Hals-, Brust- und Lendengegend . , ...	21—30 ,, ,,
An manchen Stellen in der Mitte des Oberarms und Oberschenkels*)	16—30 ,, ,,

Sowie die Schärfe des Augenmaasses, des Farbensinnes, des Gehörs bei der Unterscheidung der Töne, des Geruchs und Geschmacks bei verschiedenen Menschen verschieden sind, so ist das auch bei dem Raumsinne der Haut der Fall. Es kommt aber weniger darauf an, die Verschiedenheit der Feinheit des Raumsinns der Haut im Ganzen, als die verhältnissmässige Feinheit desselben an den Theilen eines und desselben Menschen zu bestimmen. Es ist daher nicht zulässig, aus den bei verschiedenen Menschen gemachten Beobachtungen das Mittel zu nehmen. Mit ähnlichen Experimenten haben sich nach mir Allen Thomson, Valentin und Gerber, sowie auch Volkmann beschäftigt.**) Thomson sagt, er habe »sehr nahe dieselben Resultate

---

*) Ein Abstand der berührenden Cirkelspitzen von 16''' bis 18''' war an der Mitte des Oberarms erforderlich, wenn dieselben in querer Richtung, ein Abstand von 30''' und bisweilen noch mehr war nöthig, wenn sie der Länge nach lagen. Ein Abstand von 9''' war am unteren Theile des Unterarms nöthig, wenn die berührenden Cirkelspitzen quer, 14''' wenn sie der Länge nach lagen. Ein Abstand von 14''' war in der Mitte des Unterarms nöthig, wenn die Cirkelspitzen quer, 21''' und mehr waren nöthig, wenn sie der Länge nach lagen.

**) Allen Thomson in Edinburgh *Med. and Surg. Journal Nr.* 116. Valentin Lehrbuch der Physiologie des Menschen. Bd. II. Braunschweig 1844. S. 565. Volkmann in Wagner's Handwörterbuch der Physiologie. Art. Nervenphysiologie.

erhalten, als ich. Im Ganzen scheine die Feinheit des Raumsinns bei verschiedenen Individuen mehr oder weniger verschieden zu sein, aber hinsichtlich der relativen Feinheit in verschiedenen Gegenden des Körpers habe er keine besonderen Abweichungen von den von mir bekannt gemachten Resultaten gefunden.« Fast ebenso urtheilt Valentin. In allen bisher geprüften Fällen habe die Zungenspitze 50 bis 60 mal so fein getastet, als die Mitte der Haut des Rückens. Volkmann hat die Versuche variirt und ähnliche Erscheinungen wahrgenommen wie ich.

Wenn man mit den Spitzen des geöffneten Cirkels*) auf der Haut eines Andern zwei parallele Linien zieht und zugleich dafür sorgt, dass beide Spitzen mit gleicher Kraft auf die Haut drücken, so glaubt der Beobachter zu fühlen, dass die Bahnen auf manchen Theilen der Haut sich einander nähern, auf andern sich von einander entfernen. Sie scheinen an den Theilen der Haut zu divergiren, wo die Cirkelspitzen bei ihrer Bewegung von stumpfer fühlenden Hauttheilen auf feiner fühlende übergehen, sie scheinen dagegen dann zu convergiren, wenn sie von feiner fühlenden Hauttheilen auf stumpfer fühlende übergehen. Bei einem gewissen geringen Abstande von einander erregen die Cirkelspitzen das Gefühl, als wenn nur eine einzige Linie auf der Haut beschrieben würde. Wird der Cirkel z. B. so geöffnet, dass die Spitzen desselben 7 bis 10 Pariser Linien von einander abstehen, und berührt man damit den Unterarm im Ellenbogen in querer Richtung, so glauben viele Menschen einen einzigen punktförmigen Eindruck zu fühlen. Manche, welche wissen, dass die Cirkelspitzen wirklich von einander abstehen, bilden sich ein, sie fühlten zwei Berührungen. Aber es zeigt sich gar bald, wenn man die Versuche abändert, dass es bei den meisten nicht der Fall ist. Denjenigen, welche wirklich zwei Berührungen unterscheiden, scheinen die Cirkelspitzen sehr nahe bei einander zu liegen.

---

*) Damit der Cirkel nur Druck und keinen Schmerz verursache, überzieht man die Spitzen mit Siegellack, so dass sie die Haut mit einer runden glatten Fläche berühren.

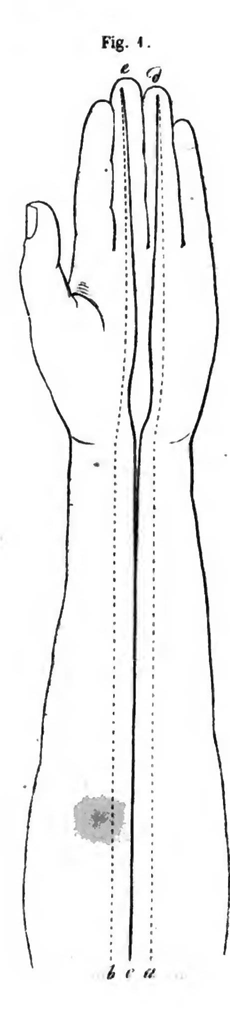


Fig. 1.

Bewegt man nun wie in Fig. 1 den Cirkel in steter Berührung mit der Haut über den Unterarm und über die Hand und die Finger, so beschreiben die beiden Spitzen die beiden parallelen Bahnen *ad* und *be* (Fig. 1). Der Beobachter dagegen glaubt zu fühlen, dass die Cirkelspitzen die Bahn *ced* beschreiben, d. h. eine Bahn, die anfangs eine einzige Linie ist, die sich aber in der Nähe des Handgelenks in zwei Bahnen theilt, welche am Anfange der Hohlhandfläche schnell aus einander weichen, in der Mitte der Hohlhand wieder etwas convergiren und auf den Fingern von neuem divergiren.

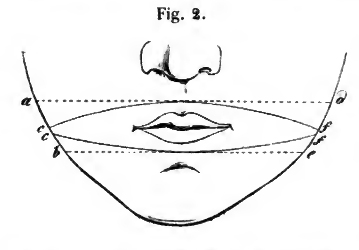
Die Bahnen, welche die Cirkelspitzen zu beschreiben scheinen, zeigen uns, wie weit uns dieselben von einander abzustehen scheinen würden, wenn wir sie an den verschiedenen Punkten quer auf den Bahnen aufstellten und damit die Haut berührten. Sie beweisen, dass sie, während sie um 7—10 Linien von einander abstehen, dem Gefühle nach auf einer grossen Strecke des Unterarms uns nur in einem einzigen Punkte zu berühren scheinen, und dass sie erst auf der durch linienförmige Tasterhabenheiten ausgezeichneten Oberfläche der Hohlhand beträchtlich von einander abzustehen scheinen.

Wenn man den Cirkel weiter, z. B. 18 Linien weit öffnet, so unterscheidet man schon an den Stellen des Unterarms einen Abstand der Spitzen, wo man vorher nur einen punktförmigen Eindruck wahrnahm,

und da, wo der Abstand vorher gering erschien, erscheint er nun beträchtlicher.

Dieselbe Erscheinung nimmt man im Gesichte wahr, wenn man mit den Cirkelspitzen eines etwa 6 bis 9 Par. Linien weit geöffneten Cirkels zuerst die Haut an der unteren Kinnlade in der Nähe des Ohrläppchens berührt, so dass die berührten Punkte senkrecht unter einander liegen. Der Zwischenraum zwischen ihnen scheint dem Beobachter sehr klein zu sein, ja sogar manchem Beobachter unwahrnehmbar klein und also wie ein Punkt. Wird nun der Cirkel quer über das Gesicht bewegt, so dass die Schenkel zwei parallele Linien auf dem Gesichte beschreiben, so glaubt der Beobachter zu empfinden, dass die Bahnen divergiren und dass sich also die Cirkelspitzen desto mehr von einander entfernen, je mehr sie sich der Mitte der beiden Lippen nähern. Während hierbei der eine Schenkel die Oberlippe, der andere die Unterlippe berührt, scheinen sie oft weiter von einander entfernt zu sein, als es wirklich der Fall ist. Fährt man nun aber fort, dieselben in steter Berührung mit der Haut über die andere Hälfte des Gesichts zu bewegen, so glaubt der Beobachter zu empfinden, dass die Bahnen der beiden Schenkel desto mehr convergiren, je näher sie dem hinteren Rande des andern Astes der Kinnlade kommen (siehe Fig. 2, wo die zwei punktirten parallelen Linien *ad* und *be* die wirklichen Bahnen der Cirkelspitzen darstellen, die gekrümmten Linien dagegen, *cc ff*, die Bahnen, wie sie uns dem Gefühle nach erscheinen.

Fig. 2.



Dieselbe Erscheinung nimmt man wahr, wenn man den Cirkel vom Halse über die Mitte des Kinns nach der Mitte der Lippe, oder auf der Wade nach dem Hohlfusse hinbewegt.

Das Gefühl von dem Abstande der Cirkelspitzen entspricht also oft gar nicht der Grösse der von ihnen überspannten Hautstücke, sondern dem Reichthume an Nervenstämmen in denselben. Aus der mitgetheilten Tabelle geht hervor, dass uns der

24 Linien betragende Abstand der Cirkelspitzen, wenn sie den Rücken berühren, kleiner erscheinen kann, als der 1/2 Par. Linie betragende Abstand derselben, wenn sie die Zungenspitze berühren. Da uns also derselbe Abstand der Cirkelspitzen vermöge der Organisation unsers Tastorgans in manchen Theilen der Haut verschwindend klein, in andern sehr gross vorkommt, in noch andern von mittlerer Grösse zu sein scheint, so eröffnet sich uns hier ein Weg, die Ursachen zu entdecken, vermöge welcher ein unsere Haut berührender Körper die Empfindung, oder wenn man lieber will, die Vorstellung von einer bestimmten Raumgrösse erweckt. Hiervon wird weiter unten ausführlicher gehandelt werden.

Nachdem wir unsere Tastorgane absichtlich bewegen gelernt haben, besitzen wir in dieser Fähigkeit noch ein zweites Vermögen, uns Vorstellungen von räumlichen Verhältnissen zu verschaffen und am genauesten nehmen wir die räumlichen Verhältnisse mit dem Auge wahr. Durch die Bewegung der Glieder und durch das Auge berichtigen wir die Vorstellungen, die das Gefühl in der Haut in uns erweckt.

Vermöge des Raumsinns in der Haut kann man auf zweierlei Weise Gestalten wahrnehmen, erstens bei ruhenden Gliedern, oder zweitens, indem man die Glieder absichtlich bewegt.

Man kann, ohne seine Glieder zu bewegen, durch das Gefühl Gestalten wahrnehmen, z. B. wenn der linienförmige Rand eines Körpers an die Haut unserer ruhenden und wohlunterstützten Glieder angedrückt wird. Hierbei bringen alle Theile des Randes gleichzeitig einen Eindruck auf die Haut hervor. Jeder Rand macht einen linienförmigen Eindruck, die gedrückten Punkte der Haut liegen wegen der unmittelbaren Berührung in derselben Ordnung, wie die drückenden Punkte des Gegenstands. Es entsteht daher ein Druckbild des Gegenstandes auf der Haut. Liegen nun an der gedrückten Stelle der Haut empfindende Theile in hinreichender Anzahl, welche fähig sind, einzelne Empfindungen zu vermitteln, so fühlt man die Gestalt des berührenden Gegenstandes, z. B. die Gestalt eines Kreises, wenn der Querschnitt einer cylindrischen Blechröhre, die Gestalt eines

Quadrats, wenn der Querschnitt einer vierseitigen Blechröhre, die Gestalt, eines Dreiecks, wenn der Querschnitt einer dreiseitigen Blechröhre an die Haut angedrückt wird. Aber während man mit dem Auge noch sehr kleine Figuren deutlich wahrnehmen kann, müssen sie, um mit der Haut gefühlt zu werden, ansehnlich gross sein, und zwar desto grösser, je weniger fein entwickelt an einem Theile der Haut der Raumsinn ist, d. h. je geringer die Zahl der Theile der Haut ist (z. B. auf einem Quadratzolle), in welchen man eine separate Empfindung erhalten kann. Wenn das Auge stumpfsichtig wird, so unterscheidet man damit auch kleinere Figuren nicht mehr, die man vorher sehr gut sehen konnte.

Wenn der Querschnitt einer Röhre von 1½ Par. Linie im Durchmesser meine Haut berührte, so konnte ich nur an der Zungenspitze, und also nicht einmal an den Fingerspitzen, oder an den Lippen die kreisförmige Figur und den von ihr eingeschlossenen Raum unterscheiden. Wenn diese letzteren Theile damit berührt wurden, schien mir der berührende Körper einen einzigen Eindruck zu machen, an welchen ich weder die Figur noch den Rand von dem von ihr umschlossenen Raume unterscheiden konnte.

Wenn die Röhre 2 Par. Linien im Durchmesser hatte, empfand ich die Gestalt mit der Zungenspitze, und mit dem mittleren Theile der Lippe und, wiewohl etwas dunkler, mit den Fingerspitzen, nicht aber am Gelenke des letzten Glieds der Finger oder auf der Volarseite des 2ten Glieds derselben.

Aber wenn sie 4 Par. Linien im Durchmesser hatte, so nahm ich die Gestalt nicht nur an den vorigen Theilen, sondern auch auf der Volarseite des 2ten Glieds der Finger wahr, wenn der Querschnitt der Röhre damit in Berührung gebracht wurde. Auf dem 1sten Fingergliede konnte aber die Figur des Querschnitts einer so kleinen Röhre noch nicht empfunden werden. Hier musste sie einen Durchmesser von 5 Par. Linien haben, und auf der Volarseite des *Metacarpus* 6 bis 6½ Par. Linien.

Wurde der Bauch mit dem Querschnitte eines hohlen Cylinders berührt, so reichte es noch nicht aus, wenn der Durchmesser 2½ Zoll betrug, um eine deutliche Empfindung von dem vom Rande umschlossenen Raume möglich zu machen. Wir sind

nur dadurch fähig, jene Figuren wahrzunehmen, dass wir durch Erfahrung eine Kenntniss von der Lage der berührten Theile unserer Haut, welche uns separate Empfindungen verschaffen können, erlangt haben. Je dichter diese Theile der Haut liegen (jemehr z. B. auf einem Quadratzolle), um so mehr können wir die feineren Verschiedenheiten der Figuren unterscheiden, und desto kleiner können sie sein, ohne unerkennbar zu werden. So wie eine gewisse Zahl von Pünktchen nöthig ist, um ein punktirtes *L* deutlich darzustellen und dazu 4 oder 5 Pünktchen völlig unzureichend sind, ungefähr 7 nothdürftig ausreichen, noch mehrere aber die Darstellung sehr vervollkommnen, so muss eine gewisse Zahl solcher Hauttheile berührt werden, welche uns separate Empfindungen verschaffen können, damit die Figur des *L* deutlich aufgefasst werden könne. Liegen jene Hauttheile wie auf dem Rücken sehr weitläuftig, so muss die Figur sehr gross sein, damit die nöthige Zahl von solchen Hauttheilen berührt werde, liegen dieselben dagegen sehr dicht, wie z. B. an den Fingerspitzen, so kann sie sehr klein sein. Das Bild der deutlich unterscheidbaren Gegenstände im Auge ist mikroskopisch klein. Es lässt sich daher schon hieraus vermuthen, dass die Theile der *Retina*, welche uns daselbst separate Empfindungen verschaffen können, mikroskopisch klein sind und unglaublich dicht liegen.

Wir können aber auch, ohne unsere Glieder zu bewegen, Gestalten durch das Gefühl wahrnehmen, wenn Figuren, z. B. Buchstaben, auf unserer Haut beschrieben werden.

Unter diesen Umständen fassen wir die Eindrücke, welche successiv auf unsere Haut gemacht werden, auf, als wären sie gleichzeitig. Unsere Fähigkeit, sie uns als gleichzeitig vorzustellen, beruht nicht auf der wirklichen Fortdauer (gleichsam einem Fortklingen) der Eindrücke, wie beim Sehen einer feurigen, im Finstern bewegten Kohle: denn die Figuren eines Kreises oder einer 8, die man mit einer glühenden Kohle im Finstern beschreibt, sieht man desto vollkommener, in je kürzerer Zeit dieselbe Bahn vollendet und wiederholt durchlaufen wird, dagegen müssen die Figuren auf die Haut sehr, sehr langsam gezeichnet werden, wenn sie von uns aufgefasst werden

sollen. Es ist dieses wichtig, weil man hierdurch unterscheidet, welchen Antheil das Sinnesorgan und das Erinnerungs- und Vorstellungsvermögen an dem Erfolge habe.

Auch die auf die Haut gezeichneten Figuren müssen desto grösser sein, je stumpfer der Raumsinn auf einem Theile der Haut ist, d. h. je weitläuftiger die Theile der Haut liegen, die uns separate, d. h. mit den benachbarten nicht zusammenfliessende, Empfindungen verschaffen. Meine Versuche haben in dieser Hinsicht an den verschiedenen Theilen der Haut ein ähnliches Resultat gegeben als die Versuche, wo Querschnitte von Röhren an die Haut angedrückt wurden.

Interessant ist es, dass man oft die Figur, die man gefühlt hat, nachzeichnen kann, ohne den Buchstaben zu errathen, und dass man ihn erst erräth, wenn man die nachgezeichnete Figur mit Augen betrachtet. Da im Auge der Raumsinn viel feiner ausgebildet ist als auf der Haut, so berichtigen wir nicht nur die durch den Raumsinn der Haut erhaltenen Vorstellungen durch den Gesichtssinn, sondern wir stellen uns auch die Gestalten, die wir gefühlt haben, durch Gesichtsphantasiebilder vor.

Wir haben uns daran gewöhnt, uns die Buchstaben in der Erinnerung so vorzustellen, wie wir sie mittelst des Gesichts zu lesen pflegen und wie wir dieselben schreiben. Das 𝓛 erkennen wir nicht so leicht wieder, wenn wir es verkehrt geschrieben sehen ⅃, und eben so wenig, wenn wir es umgekehrt sehen Γ, oder wenn wir dasselbe endlich sogar umgekehrt und zugleich verkehrt sehen ⅂. Man sollte nun glauben, dass es sich anders verhalten würde, wenn uns Jemand einen Buchstaben auf die Haut schriebe, nämlich es würde ohne Einfluss auf die Erkennung des Buchstaben sein, ob er richtig, oder verkehrt, aufrecht, oder umgekehrt, oder endlich sogar umgekehrt und zugleich verkehrt geschrieben würde. Das ist aber nicht der Fall.

Auf der Stirne*) muss der Buchstabe ⅃, auf dem Hinterhaupte muss er 𝓛, auf dem Bauche muss er Γ, auf dem Kreuz-

*) Man lege ein Blatt Papier auf die Stirn und lasse einem Andern die Figur ⅃ schreiben, so wird man fühlen, dass der Buchstabe in seiner richtigen Lage ist. Hierauf lasse man darauf die Figur 𝓛 schreiben, so wird man fühlen, dass er verkehrt geschrieben ist. Auf dem Hinterhaupte muss der Buchstabe 𝓛 geschrieben werden.

beine endlich muss er [illegible] geschrieben werden, damit er uns richtig zu stehen scheine und am leichtesten zu erkennen sei. *Wir denken uns die Figuren, die uns auf den Kopf geschrieben werden, als sähen wir sie in der Richtung von hinten nach vorn*, d. h. in derjenigen Richtung, in welcher wir stets sehen. In derselben Richtung betrachten wir auch einen Buchstaben, den wir selbst auf unsere Stirn schreiben, oder den ein Anderer auf dieselbe schreibt. Wir fühlen ihn so, als wäre die Haut der Stirn durchsichtig und wir läsen ihn auf der dem Stirnbeine zugekehrten Oberfläche derselben. Einen Buchstaben dagegen, der auf das Hinterhaupt geschrieben wird, lesen wir nicht so, als könnten wir ihn auf der dem Hinterhauptbeine zugekehrten Oberfläche der Haut lesen, sondern als ständen wir hinter uns und läsen ihn, indem wir von da die behaarte Oberfläche der Haut des Hinterhaupts betrachteten. Ein auf den Bauch geschriebener Buchstabe muss mit seinem Anfange abwärts gegen die Füsse, mit seiner Schleife und mit seinem Ende aufwärts gegen unsern Kopf gerichtet sein, so wie er mit Tinte auf ein auf den Bauch gelegtes Papier geschrieben werden müsste, damit wir ihn von oben herabsehend am besten lesen könnten.

Eine zweite Methode, die Gestalt der Körper und ihren Abstand von einander mittelst des Raumsinns der Haut wahrzunehmen, besteht in der absichtlichen Bewegung unserer mit dem Raumsinne begabten Glieder.

Haben wir, unterstützt durch den Tastsinn der Haut oder durch den Gesichtssinn, gelernt, unsere Glieder unserer Absicht gemäss in bestimmten Richtungen und Krümmungen zu bewegen, so sind wir uns durch das Gefühl von der Anstrengung derjenigen Muskeln, welche nöthig sind, um ein Glied in eine gewisse Lage zu bringen oder in derselben zu erhalten, in jedem Augenblicke bewusst, in welcher Lage sie sich befinden. Auch wenn die Augen geschlossen sind und ein Anderer unsere Hände und Arme in eine beliebige Stellung bringt, sind wir uns dieser Stellung bewusst. Berühren wir eine Tischplatte mit einem Finger der rechten und mit einem Finger der linken Hand auf ihrer

oberen und unteren Oberfläche, so wissen wir bei verschlossenen Augen ungefähr anzugeben, wie dick die Platte ist, indem wir eine Vorstellung von dem unsere Fingerspitzen trennenden Zwischenraume haben.

Durch die Bewegung, die man machen muss, um mit den Händen die Grenzen der Körper zu umgehen, erlangt man eine Vorstellung von der Gestalt und Grösse derselben und zwar nach allen drei Dimensionen des Raums.

Ueber die Einrichtungen im Nervensysteme zum Zwecke des Raumsinns in der Haut, namentlich über die Empfindungskreise.

Bei allen Sinnorganen haben wir den im Gehirne gelegenen Theil, den centralen Theil des Sinnorgans, über den wir nichts Näheres wissen, den peripherischen Theil desselben und die diese beiden Theile verbindenden Nervenfäden zu unterscheiden.

An dem peripherischen Theile geschieht die Einwirkung gewisser Bewegungen, die von den zu empfindenden Körpern ausgehen, auf die Nerven, die zu diesem Zwecke mit gewissen Hülfsorganen, welche diese Einwirkung vermitteln, versehen sind. Der Zustand, in welchen dadurch die Nervenfäden versetzt werden, theilt sich gewissen Theilen des Gehirns mit. Ohne eine solche Mittheilung entsteht keine Empfindung, denn Durchschneidung, Unterbindung, Zusammendrückung, übermässige Erwärmung oder Erkältung eines Stücks der Nerven, welche die Verbindung des peripherischen und centralen Theils des Sinnorgans bewirken, oder auch Betäubung des centralen Theils des Sinnorgans selbst, z. B. bei Ohnmachten, machen, dass gar keine Empfindung mehr entsteht, wenn auch das peripherische Sinnorgan und seine Nerven keine Veränderung erlitten haben und nach wie vor die Einwirkungen der Körper erfahren, die vorher Empfindungen erregten. Wohl aber können sich früher entstandene Sinnesempfindungen ohne Mitwirkung der äusseren Sinnorgane, z. B. nach ihrer Zerstörung, noch immer als Phantasievorstellungen wiederholen, und es können sogar nach Zerstörung des peripherischen Sinnorgans Empfindungen entstehen, die den Schein hervorbringen, als existirte dasselbe noch, z. B. bei Amputirten, die Jahre lang nach der Amputa-

tion Empfindungen und Schmerzen in den amputirten Gliedern fühlen, die gar nicht mehr existiren. Durch krankhafte Zustände im centralen Theile des Sinnorgans können subjective Empfindungen entstehen, die den durch äussere Einflüsse erregten Empfindungen so ähnlich sind, dass die Patienten sie von diesen nicht zu unterscheiden wissen.

Alle diese Thatsachen zeigen den grossen Einfluss des centralen Theils eines Sinnesorgans auf das Zustandekommen der Empfindungen.

Um sich eine Vorstellung von der Beziehung zu bilden, in welcher der peripherische und centrale Theil eines Sinnorgans zu einander stehen, ist es wichtig zu bemerken, dass die kleinsten Nervenfäden, welche die Theile des Gehirns und Rückenmarks mit den Theilen des Körpers verbinden, unterwegs nur selten eine Spaltung in Aeste erleiden, dass diese Spaltung in der Nähe der peripherischen Enden viel häufiger vorkommt als in grösserer Entfernung von denselben, und dass dieselbe so geschieht, dass die Aeste nach der Peripherie zu gehen (nicht nach dem Gehirn hin). Hierdurch sind die Nervenfäden geeignet, bestimmte einzelne Regionen des Körpers mit einzelnen Punkten oder Theilen des Gehirns zu verbinden. Ferner ist von grosser Wichtigkeit, dass die Nervenfäden auf ihrem Wege von den peripherischen Organen zu den centralen ungeordnet zu liegen scheinen. Die Empfindungsnerven sind daselbst mit den Bewegungsnerven gemengt, und der Weg, den sie durch den Körper nehmen, ist nicht immer derselbe und dieser hat keinen Einfluss auf das Empfindungsvermögen der Theile, denen die Nerven angehören. Dagegen ordnen sie sich in der Nähe ihrer peripherischen und centralen Endigung. Denn die peripherischen Enden der Bewegungsnerven begeben sich zu den Muskeln, die peripherischen Enden der meisten Empfindungsnerven begeben sich zur Haut, die centralen Enden der Bewegungsnerven gehen zu den vorderen, die der Empfindungsnerven zu den hinteren Wurzeln der Rückenmarksnerven.

Für die Verrichtung der Nerven scheint es also gleichgültig zu sein, wie die Fäden auf ihrem Wege vom Gehirne zu den Theilen geordnet liegen und welchen Weg sie nehmen, es scheint aber in manchen Sinnorganen nicht gleichgültig zu sein, in welcher Ordnung sie sich an der Peripherie und in den Centralorganen endigen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass der An-

ordnung der Fäden mancher Nerven an der Peripherie eine gewisse Anordnung derselben im Gehirne entspreche, wenn sie auch nicht dieselbe ist.

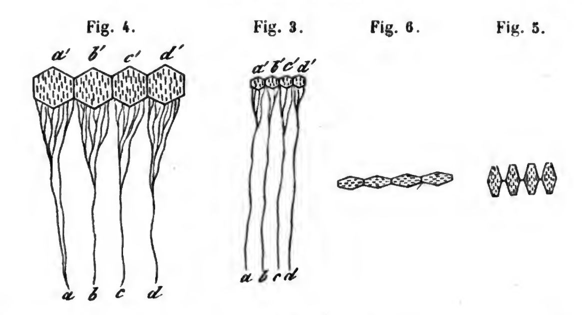
Das peripherische Sinnorgan für den Tastsinn, d. h. für den Sinn, durch den wir Druckempfindungen, Temperaturempfindungen und zugleich Raumempfindungen erhalten, ist so beschaffen, *dass sich auf ihm Gestalten, Entfernungen und Bewegungen der wahrzunehmenden Körper gleichsam abbilden können.*

Dieses Sinnorgan hat die Gestalt einer grossen, sehr ausgebreiteten empfindlichen Membran. Die zu empfindenden Körper können mit derselben in Berührung kommen, und hierbei theilt jeder zu empfindende Punkt des Körpers nur dem berührten Punkte der Haut und seiner allernächsten Umgebung (nicht vielen Punkten) die Bewegung mit, die eine Empfindung hervorrufen soll. Die punktförmigen Eindrücke, die die Punkte eines Körpers auf die Haut machen, liegen, wie wir schon oben gesehen haben, in derselben Ordnung, als die Punkte des zu empfindenden Körpers selbst, der die Eindrücke hervorbringt. Wird der Querschnitt einer cylindrischen vierseitigen oder dreiseitigen Röhre an die Haut angedrückt, so entsteht, wie wir oben gesehen haben, ein Druckbild dieses Querschnitts auf der Haut. Eben so bildet sich auf unserer Haut die Bewegung eines Körpers ab, der, während er sich an ihrer Oberfläche hinbewegt, auf dieselbe continuirlich einen Druck ausübt, oder sie durch Wärmemittheilung oder Wärmeentziehung afficirt. Wird die Haut gleichzeitig mit zwei Cirkelspitzen berührt, so bildet sich die Entfernung derselben auf unserer Haut ab.

Aber die sich abbildenden Gestalten, Bewegungen und Entfernungen würden nicht empfunden werden, wenn Eindrücke derselben Art auf den verschiedenen Punkten der empfindlichen Oberfläche unserer Haut ganz gleiche und daher nicht zu unterscheidende Empfindungen hervorriefen. Eine Hauptsache bei den für den Raumsinn getroffenen Einrichtungen besteht daher darin, 1) *dass die empfindliche Haut dieses Sinnorgans gleichsam ein Mosaik von empfindlichen Theilen* (Empfindungskreisen) *ist, von welchen jeder seine eigenthümliche Empfindlichkeit hat, vermöge welcher zwei Einwirkungen auf zwei Theile dieses Mosaiks stets zwei verschiedene Empfin-*

dungen hervorbringen, welche nicht in eine Empfindung verschmelzen, auch dann, wenn jene Einwirkungen übrigens ganz gleich sind, 2) dass die Verschiedenheit der Empfindungen auf benachbarten Empfindungskreisen zwar äusserst gering ist, dass sie aber bis zu einer gewissen Grenze hin wächst, mit der Zahl der specifisch empfindlichen Empfindungskreise, die zwischen den berührten Theilen der Haut liegen, 3) dass, wie die Erfahrung lehrt, diese Empfindungskreise nicht in allen Gegenden der Haut von gleicher **Grösse** und **Gestalt** sind, und dass dadurch zu erklären ist, dass der Raumsinn in manchen Regionen der Haut schärfer, in andern stumpfer ist, und dass er an den Armen und Beinen in querer Richtung feiner und in der Richtung nach der Länge des Glieds stumpfer ist. Je kleiner nämlich die Empfindungskreise sind, desto mehr solche Empfindungskreise können auf dem Raume eines Quadratzolls der Haut neben einander Platz haben. Je mehr aber solche Empfindungskreise neben einander auf einem gleich grossen Hautstücke liegen, desto mehr Punkte des zu empfindenden Körpers können auf der Haut unterscheidbare Eindrücke hervorbringen, und desto mehr ins Feine und Einzelne geht die Empfindung der räumlichen Verhältnisse des zu empfindenden Körpers und seiner Theile. Wenn die Empfindungskreise länglich sind und den grösseren Durchmesser stets nach derselben Richtung kehren, so wird die Haut in dieser Richtung einen stumpferen Raumsinn besitzen als in der Richtung, nach welcher die kleineren Durchmesser der Empfindungskreise gerichtet sind.

Jeder übersieht leicht, dass ein Cirkel in Fig. 3 mehr Empfindungskreise überspannt, als in Fig. 4, wo sie grösser sind, und dass derselbe in Fig. 5, wo die Empfindungskreise länglich sind, in der horizontalen Richtung mehr Empfindungskreise überspannt als in Fig. 6. Scheint uns nun der Abstand der Cirkelspitzen desto grösser, je mehr Empfindungskreise zwischen den vom Cirkel berührten Theilen der Haut liegen, so muss uns der Abstand der Cirkelspitzen grösser erscheinen in einer Gegend der Haut, wo die Empfindungskreise die Grösse haben wie in Fig. 3, als wo sie die Grösse haben wie in Fig. 4. Dort wird man bei einer gewissen Oeffnung des Cirkels zwei Empfindungen und also eine



doppelte Berührung zu unterscheiden im Stande sein, während man hier nur eine einzige Berührung wahrzunehmen glauben wird. Sind die Empfindungskreise länglich und liegen die langen Durchmesser bei allen in derselben Richtung, wie in Fig. 5, so wird derselbe Cirkel, wenn er die kurzen Durchmesser der Empfindungskreise überspannt, mehr Empfindungskreise überspannen, als wenn er die langen Durchmesser derselben überspannt, und dieses wird die Wirkung haben, dass die Cirkelspitzen dem Gefühle nach, das sie bei der Berührung erregen, im ersteren Falle weiter von einander entfernt zu sein scheinen werden, als im zweiten, und dass man im ersten Falle bei einer gewissen Entfernung der Cirkelspitzen schon zwei Berührungen zu unterscheiden im Stande sein wird, bei welchen man im zweiten Falle nur eine einzige Berührung zu empfinden glauben wird. Und so verhält sich's an den Armen und Beinen wirklich (siehe oben S. 92). Man unterscheidet daselbst, wenn die Cirkelspitzen in querer Richtung aufgesetzt werden, bei einer gewissen Oeffnung des Cirkels, schon zwei Berührungen, bei den man, wenn sie in der Richtung der Länge des Glieds aufgesetzt werden, nur eine einzige Berührung empfindet.

Worin liegt nun die Ursache jener specifischen Empfindlichkeit der Empfindungskreise, vermöge welcher sogar gleiche Eindrücke, wenn sie verschiedene Empfindungskreise treffen, von einander unterschieden werden können, und zwar desto deutlicher, je mehr Empfindungskreise von den Cirkelspitzen überspannt werden?

Wären die Empfindungskreise in ihrem Baue verschieden, so könnte man muthmassen, dass sie so organisirt wären, dass

Einwirkungen derselben Art, wenn sie verschiedene Empfindungskreise träfen, qualitativ verschiedene Empfindungen erweckten. Allein wir bemerken keine Verschiedenheit in der Organisation benachbarter Empfindungskreise. Wir bemerken aber, dass diejenigen Regionen der Haut, welche sich durch einen sehr feinen Raumsinn auszeichnen, wie die Finger an ihrer Hohlhandseite, die Zungenspitze und die Lippen, bei gleicher Oberfläche viel dickere oder zahlreichere Stämme von Empfindungsnerven erhalten, als solche Regionen, welche, wie der Rücken, die Mitte des Oberarms und Oberschenkels, des Unterarms und des Unterschenkels, einen sehr stumpfen Raumsinn besitzen. Hieraus darf man aber nicht schliessen, dass sich in den Theilen der Haut, welche mit einem sehr feinen Raumsinne begabt sind, bei gleich grosser Oberfläche viel mehr Nervenenden befänden, als in den, welche einen sehr stumpfen Raumsinn haben. Denn die Erfahrung lehrt, dass auch die mit einem stumpfen Raumsinne versehenen Theile der Haut in jedem unterscheidbaren Punkte empfindlich sind. Denn wir empfinden überall die Berührung mit einer Nadelspitze, wobei jedoch nicht ausser Acht zu lassen ist, dass sich der Druck der Nadelspitze auf einen grössern Raum ausbreitet, ehe er bis zu den empfindlichen Theilen der Lederhaut gelangt. Ich habe durch Messungen bewiesen, dass nur der Raumsinn in verschiedenen Theilen der Haut so ungleich entwickelt ist, und dass der Temperatursinn und der Drucksinn (das Vermögen, Temperatur- und Gewichtsunterschiede zu empfinden) sehr viel gleichmässiger in den verschiedenen Theilen der Haut ausgebildet sind. Der Raumsinn auf der Zunge ist ungefähr 50mal feiner als der auf dem Rücken. Auf den Fingerspitzen ist er ungefähr 18mal so fein als am Ellenbogen und 10mal so fein als an der Stirn. Prüft man aber diese Theile hinsichtlich ihrer Fähigkeit, uns Gewichts- und Temperaturunterschiede wahrnehmen zu lassen, so findet sich in allen diesen Theilen fast derselbe Grad der Feinheit. Man gebraucht daher den Ellenbogen nicht ungern, um feine Temperaturunterschiede, z. B. des Badewassers, wahrzunehmen.

Ich rechne dieses Resultat, dass der Raumsinn in verschiedenen Theilen der Haut einen so sehr verschiedenen Grad von Vollkommenheit hat, während der Drucksinn oder auch der Temperatursinn in denselben Theilen fast einen gleichen Grad

von Vollkommenheit besitzen, zu den wichtigsten Ergebnissen, zu welchen mich meine Messungen der Feinheit dieser drei in der Haut ausgebildeten Sinne geführt haben. *)

Während die Feinheit des Raumsinns auf dem letzten Gliede der Finger und auf einem Theile des Unterarms sich wie 9 : 1 verhielt, verhielt sich an diesen beiden Orten die Feinheit des Drucksinns wie 7 : 4, d. h. der Raumsinn war an jenen Fingergliedern 9mal so fein als auf dem Unterarme, dagegen war der Drucksinn auf den Fingergliedern noch nicht ganz ½mal so fein als der Drucksinn am Unterarme, und doch sind es dieselben Nerven, welche dem Raumsinne und dem Drucksinne dienen. Dieses ist nicht widersprechend. Die Zahl der Nervenenden in einem Hautstücke von gleicher Grösse scheint in den verschiedenen Gegenden der Haut nicht sehr verschieden zu sein, und daher können der Drucksinn und der Temperatursinn in allen Gegenden der Haut, wo die Dicke der Oberhaut keinen Unterschied begründet, ziemlich gleich fein sein, denn bei diesen Sinnen scheint die Feinheit unter andern von der Zahl der denselben auf einem gleich grossen Stücke der Haut gewidmeten Nervenenden abzuhängen, und es scheint nicht viel darauf anzukommen, ob die sich endigenden Nerven ungetheilt bis zu dem Gehirne fortlaufen, oder ob sie Aeste eines sich theilenden elementaren Nervenfadens sind. Denn wenn auf mehrere solche Aeste zugleich gewirkt wird, so können sich unstreitig die Eindrücke summiren und in dem Faden, zu dem sie gehen, eine grosse Bewegung hervorbringen. Dagegen scheint, wie wir sehen werden, hinsichtlich der Feinheit des Raumsinns sehr viel darauf anzukommen, ob zwei Theile der Haut ihre Empfindlichkeit zweien bis zum Gehirn fortlaufenden Nervenfaden oder zwei Aesten eines solchen Nervenfadens verdanken. Denn die mit einem feinen Raumsinne versehenen Theile zeichnen sich dadurch aus, dass zu ihnen sehr grosse oder sehr zahlreiche Nervenstämme gehen, d. h. dass zu ihnen sehr viele vom Gehirne entspringende elementare Nervenfäden hingeleitet werden. Es scheint nämlich, dass die Empfindungen, die gleichzeitig durch zwei Aeste eines und desselben elementaren Nervenfadens hervorgebracht werden, unter einander zu einer einzigen Em-

*) Siehe Wagner Handwörterbuch der Physiologie, Art. Tastsinn, p. 548 u. den besonderen Abdruck, die Lehre vom Tastsinne u. Gemeingefühl p. 90.

pfindung verschmelzen, weil sie nur auf einen und denselben Theil des Gehirns einen Eindruck machen, dass dagegen gleichzeitige Empfindungen, die durch mehrere elementare, zu verschiedenen Punkten des Gehirns gehende, Nervenfäden vermittelt werden, von einander unterscheidbar sind und also nicht zu einer Empfindung verschmelzen, und dieses ist eben eine nothwendige Bedingung für den Raumsinn.

Der scheinbare Widerspruch, dass jeder Punkt unserer Haut so empfindlich ist, dass wir die Haut nirgends mit einer Nadelspitze berühren können, ohne eine Empfindung zu erregen, und dass es dennoch Regionen der Haut giebt, wo die Cirkelspitzen, wenn sie zwei Zoll weit von einander abstehen, nur einen einzigen empfindbaren Eindruck hervorbringen, löst sich durch die Annahme, dass die zahlreichen Nervenenden, welche Aeste von Elementarfäden sind, wohl Empfindungen, aber nicht von einander unterscheidbare Empfindungen hervorbringen können. *abcd* (Fig. 4) stellen vier bis zum Gehirn gesondert gehende elementare Nervenfäden vor. Jeder von ihnen möge sich durch eine Theilung in viele Aeste in einem Stück der Haut ausbreiten, das ich hier willkührlich gross und sechseckig gezeichnet habe, und die Strichelchen auf den sechseckigen Abtheilungen der Haut mögen also die Enden dieser Aeste sein. Wenn auf zwei dieser Strichelchen zwei gleichzeitige Eindrücke gemacht werden, so können sie nach meiner Annahme niemals als zwei Eindrücke unterschieden werden, weil sie durch einen und denselben Nervenfaden, z. B. durch *a* mit dem Gehirne in Verbindung stehen, dagegen können wohl zwei Eindrücke, die die sechseckigen Hautstücke *a'* und *d'* treffen, als zwei empfunden werden, weil jeder derselben durch einen separaten Nervenfaden mit dem Gehirne zusammenhängt.

Fig. 4.

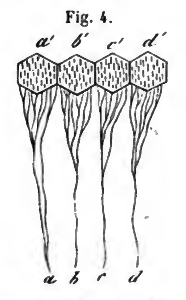


Fig. 3.



Man darf aber daraus nicht den Schluss ziehen, dass zwei Eindrücke, die gleichzeitig zwei benachbarte Empfindungskreise treffen, zwei durch einen Zwischenraum getrennte Empfindungen hervorbringen müssten. Vielmehr habe

ich Gründe, anzunehmen, dass sie unter diesen Umständen noch nicht durch einen Zwischenraum getrennt zu sein scheinen können, und habe das in meiner Abhandlung über den Tastsinn bestimmt und klar ausgesprochen.

Jede der vier Abtheilungen (Empfindungskreise) *a' b' c' d'* (Fig. 4), deren wirkliche Grösse unbekannt ist und die vielleicht sehr klein sind, verschafft uns, wie wir sehen werden, die Vorstellung von einem Raumelemente. Setzen wir also, es würden auf zwei benachbarte Empfindungskreise zwei Eindrücke hervorgebracht, so würden diese in einen Eindruck zusammenfliessen müssen; denn wir nähmen keinen Zwischenraum zwischen ihnen wahr. Um einen solchen wahrzunehmen, müsste wenigstens e i n Empfindungskreis zwischen den berührten Empfindungskreisen liegen, auf dem wir daselbst den Eindruck vermissten, den wir sonst dort zu empfangen und zu empfinden gewohnt wären; denn gerade der Umstand, dass wir auf den Empfindungskreisen, welche zwischen zwei berührten Theilen der Haut liegen und auf den wir oft Eindrücke empfunden haben, einen Mangel der Empfindung wahrnehmen oder daselbst Empfindungen von anderer Art erhalten, erweckt in uns die Vorstellung von einem Zwischenraume. Wir tragen nicht in Gedanken unsere Empfindungen in einen uns schon vorher bekannten Raum ein, sondern wir bauen uns unsere Vorstellung von einem bestimmten Raume aus den Empfindungen, welche uns der Raumsinn verschafft, auf und die Empfindungskreise der Haut, d. h. die kleinsten Theile der Haut, auf welchen wir gleichzeitige Eindrücke als verschiedene unterscheiden können, liefern uns die Elemente zu diesem Baue. Die Haut ist ein Mosaik aus empfindlichen und unempfindlichen Theilen, aber die Lücken zwischen den empfindenden Theilen unserer Haut bringen keine bemerkbaren Lücken in der Empfindung der Gegenstände hervor, vielmehr schliessen sich die empfundenen Punkte an einander an und vereinigen sich zu einem Continuum, in welchem wir keine leeren Zwischenräume bemerken. Durch den Mangel einer Empfindung an einem Theile der Haut entsteht nur dann die Vorstellung eines Zwischenraums, wenn wir gewohnt sind, mittelst jenes Theils eine separate Empfindung zu erhalten. Da nun aber ein Zwischenraum, der nur aus einem einzigen Raumelemente bestände, verschwindend klein sein würde, so kann man annehmen, dass mehrere unberührte Empfindungskreise zwi-

schen den berührten Empfindungskreisen liegen müssen, damit man einen deutlich wahrnehmbaren Zwischenraum zwischen den berührten Theilen der Haut wahrnehme.

Wir haben uns also nach meiner Hypothese unsere Haut als ein Mosaik von unempfindlichen, und von kleinsten empfindlichen Theilen vorzustellen, welche letzteren auf Fig. 3 und 4 durch kleine kurze Striche in den sechseckigen Räumen vergrössert angedeutet sind. Sie entsprechen den in die Gefühlswärzchen und in die Haarbälge eindringenden Nervenenden. Diese liegen auf der ganzen Haut so dicht, dass man die Haut nirgends mit einer Nadelspitze berühren kann, ohne dass der durch die Oberhaut fortgepflanzte Druck ein solches empfindliches Theilchen oder einige träfe. Vermöge solcher empfindlicher Theile empfangen wir die Einwirkungen des Drucks und die Eindrücke der Wärme und Kälte. Da diese empfindlichen Theile auf der ganzen Haut nicht sehr ungleichmässig vertheilt liegen, so ist auch das Vermögen, Gewichtsunterschiede oder überhaupt Druckunterschiede wahrzunehmen, und ferner das Vermögen, Temperaturunterschiede zu empfinden, in allen Regionen der Haut ziemlich gleich ausgebildet.

Hinge jedes solches Nervenende durch einen separaten Nervenfaden mit dem Gehirne zusammen, so würden wir ein mikroskopisch feines Tastorgan besitzen, wir würden, wenn zugleich die Oberhaut dünn genug wäre, die Gestalt der Flächen und die Winkel eines Sandkorns durch das Gefühl wahrnehmen können, und der Raumsinn würde auf allen Regionen unserer Haut, eben so wie der Drucksinn und Temperatursinn, ziemlich gleichmässig ausgebildet sein. Allein viele dieser Nervenenden hängen nur durch einen einzigen elementaren Nervenfaden mit dem Gehirne zusammen und können daher keinen separaten Eindruck auf das Gehirn machen. Die kleinsten Theile der Haut, welche Empfindungen vermitteln, die, wenn sie auch gleichzeitig und gleichartig sind, doch unterschieden werden können, sind die hier sechseckig gezeichneten Abtheilungen der Haut, von welchen eine jede durch einen elementaren Nervenfaden mit dem Gehirne zusammenhängt, der sich in der Hautabtheilung auf irgend eine Weise ausbreitet, z. B., wie hier dargestellt ist, durch eine Theilung des elementaren Nervenfadens in Aeste.

Diese Abtheilungen der Haut (Empfindungskreise) können nicht in allen Gegenden derselben gleich gross sein, weil durch

die Zergliederung bewiesen ist, dass manche Hautstücken von gleicher Oberfläche dicke, oder zahlreiche, andere dünne oder minder zahlreiche Nervenstämme zugeführt erhalten, von welchen jeder als ein Packet von elementaren Nervenfäden zu betrachten ist, deren jeder in der Regel separat vom Gehirne entspringt. Vielmehr werden die Empfindungskreise in den Regionen der Haut sehr gross sein (wie in Fig. 4), zu welchen nicht sehr dicke und nicht sehr zahlreiche Nervenstämme gelangen, d. h. zu den nicht sehr zahlreiche, vom Gehirn ausgehende, elementare Nervenfäden gehen, z. B. auf der Haut des Rückens und in den Regionen sehr klein sein, wo (wie in Fig. 3) zu einem Hautstücke von gleicher Oberfläche sehr dicke oder sehr zahlreiche Nervenstämme und also sehr viel elementare Nervenfäden hingehen, z. B. auf der Haut der Zungenspitze und der Fingerspitzen. Hierdurch erklärt sich, warum der Raumsinn in manchen Regionen der Haut, z. B. an der Zungenspitze, ungefähr 50mal feiner sein kann als auf dem Rücken, während hinsichtlich des Temperatursinns und des Drucksinns diese Hauttheile wenig unterschieden sind. In den Gegenden der Haut, wo die Empfindungskreise wie in Fig. 3 klein sind, überspannt ein uns mit seinen Spitzen berührender geöffneter Cirkel viele solcher Abtheilungen, während derselbe Cirkel in einer andern Region der Haut, wo die Empfindungskreise wie in Fig. 4 gross sind, wenigere überspannt. Die Empfindung, die ein jeder solcher Empfindungskreis hervorbringt, erweckt in uns, wie wir weiterhin sehen werden, die Vorstellung von einem Raumelemente. Die dunkle Erinnerung, wie viel unberührte Empfindungskreise (auf welchen wir schon oft Empfindungen gehabt haben) zwischen den berührten Empfindungskreisen der Haut liegen, erweckt in uns die Vorstellung von einem Zwischenraume, der uns um so grösser zu sein scheint, je mehr unberührte Empfindungskreise von dem Cirkel überspannt werden. Nach dieser Ansicht würde die Erscheinung, dass uns der Abstand der Cirkelspitzen an den Armen und Beinen grösser zu sein scheint, wenn sie eine quere Lage haben, als wenn sie in der Länge dieser Glieder liegen, so zu erklären sein, dass die Empfindungskreise daselbst eine längliche Gestalt haben, und dass daher ein Cirkel weniger Empfindungskreise überspannt, wenn er sie wie in Fig. 6 in der Längenrichtung, als wenn er dieselben wie in Fig. 5 in querer Richtung überspannt.

Die Einwürfe, welche Kölliker gegen meine Hypothese gemacht und Lotze wiederholt hat, sind nicht begründet. Sie beruhen auf einem Missverständnisse. Die genannten Physiologen sind nämlich der Meinung, ich behauptete, es entstünden zwei räumlich getrennte Empfindungen, wenn die Cirkelspitzen zwei benachbarte Empfindungskreise berührten, während ich gerade das Gegentheil behaupte; denn ich sage:*) »damit zwei gleichzeitige auf die Haut gemachte Eindrücke örtlich als zwei in einem gewissen Abstande von einander liegende Eindrücke unterschieden werden können, scheint erforderlich zu sein, dass die Eindrücke nicht nur auf zwei verschiedene Empfindungskreise gemacht werden, sondern dass zwischen diesen noch ein Empfindungskreis oder mehrere Empfindungskreise liegen, auf welche kein Eindruck gemacht wird.«

Ferner glauben Kölliker und Lotze, ich behauptete die Grösse der Empfindungskreise bestimmen zu können, und es gäbe nach meiner Meinung Empfindungskreise, welche 2 oder 2½ Zoll lang und breit wären, während ich nur die relative Grösse der Empfindungskreise bestimmt und angegeben habe, dass die Empfindungskreise auf der Zungenspitze ungefähr 50mal kleiner seien als auf dem Rücken, über die absolute Grösse derselben aber gar nichts ausgesprochen habe, so dass man sie sich also so klein denken kann, dass sie mit unsern anatomischen Untersuchungen über die Verbreitung der Nerven übereinstimmen.

Kölliker's Einwürfe**) sind folgende:

1) Dass nirgends an unserem Körper Flächen von 12 bis 30 Linien Durchmesser von einer einzigen Nervenfaser versorgt würden. Ich habe in meiner von ihm citirten Abhandlung über den Tastsinn und das Gemeingefühl nirgends eine solche Behauptung aufgestellt. Nach meiner Darstellung wissen wir nicht, wie viel unberührte Empfindungskreise zwischen zwei berührten Theilen der Haut liegen müssen, damit wir eine deutliche Vorstellung von dem sie trennenden Zwischenraume erhalten. Wenn gar kein unberührter Empfindungskreis dazwischen liegt, so ist

---

*) Artikel Tastsinn in R. Wagners Handwörterb. der Physiologie p. 527.

**) Kölliker Mikroskopische Anatomie. Leipzig 1850. B. II. p. 39 sq.

nach meiner Lehre mit Gewissheit vorauszusehen, dass die beiden Berührungen nicht durch einen Zwischenraum getrennt zu sein scheinen. Da nun aber die Empfindung, die auf einem Empfindungskreise entsteht oder vermisst wird, nur in uns die Vorstellung von einem einzigen Raumelemente erweckt, so wissen wir nicht, wie viel Empfindungskreise unberührt bleiben müssen, damit die Vorstellung von einem Zwischenraume von messbarer Grösse in uns entstehe.

2) Dass bei der Weber'schen Erklärung der Sinn für Oertlichkeit ein sehr wechselnder sein müsste, scharf an den Grenzen auch der grössten Empfindungskreise, stumpf auf diesen selbst.

Dieser Einwurf erledigt sich, wenn man erwägt, dass mehrere Empfindungskreise zwischen zwei berührten Hauttheilen liegen müssen, damit man einen deutlich unterscheidbaren Zwischenraum wahrnehmen könne.

3) Dass auf der Haut auf locale Reize überall auch locale Empfindungen entständen, d. h. dass ein Stich mit einer Nadel überall als ein Stich gefühlt werde und nirgends den Eindruck mache, als ob ein Stück der Haut berührt werde, welches 1 Zoll oder 2 Zoll oder mehr im Durchmesser hätte. Auch dieser Einwurf gründet sich auf den Irrthum, ich behauptete, es gebe Empfindungskreise, die 1 oder 2 Zoll gross im Durchmesser wären. Zugleich ist darauf keine Rücksicht genommen, dass eine Empfindung sich qualitativ unterscheide, wenn wenige Nervenenden einen Eindruck erleiden, als wenn viele Nervenenden gleichzeitig denselben bekommen. Ungeachtet wir die Grösse und Gestalt der Oberfläche, mit der uns ein stumpfer oder dicker Körper berührt, nicht empfinden, so fühlen wir doch einen Unterschied in der Qualität der Empfindungen, die derselbe oder eine Nadelspitze hervorbringt, und da wir aus andern Erfahrungen wissen, dass die letztere Empfindung gewöhnlich von einem sehr spitzen Körper herrühre, so stellen wir uns vor, dass wir in einem Punkte berührt werden, wenn wir diese Empfindung haben. Wir können uns aber hierbei sehr irren. Eine stechende Empfindung kann auch entstehen, wenn wir von einer ätzenden Säure berührt werden, ungeachtet diese ein grösseres Stück unserer Haut berührt. Eine stechende Empfindung ist nicht die Empfindung eines Punktes.

4) Weber's und Krause's Ansichten führten zu einer Unmöglichkeit, denn berührte man zwei Punkte des Rückens mit einem 25 Linien weit geöffneten Cirkel, so entstehe nach Weber nur eine Empfindung, weil diese zwei Punkte auf einen Empfindungskreis fallen, der von einer einzigen Nervenfaser versorgt wird. Fährt man nun mit dem gleich weit geöffneten Cirkel fort, den Rücken zu berühren, indem man den ganzen Cirkel jedesmal um 6 Linien weiter rückt, so kann man successiv den ganzen Rücken berühren und würde stets nur eine einzige Empfindung erhalten, so dass man nach jenem Principe der Erklärung daraus folgern müsste, dass der ganze Rücken nur von einer einzigen Nervenfaser versorgt werde.

Dieser Einwurf beweist nur, wie richtig und nothwendig meine Annahme sei, dass man nicht zwei räumlich getrennte Empfindungen erhalte, wenn man zwei benachbarte Empfindungskreise berühre, weil ein Empfindungskreis oder mehrere zwischen den berührten Hauttheilen liegen müssen, damit wir einen Zwischenraum zwischen ihnen fühlen können. Bei Kölliker's Demonstrationen kommt es gar nicht darauf an, wie weit der Cirkel geöffnet werde. Auch wenn er nur 2 Linien weit geöffnet wird, findet dasselbe statt. Man fühlt immer nur eine Berührung, und setzt man ihn um 1 Linie weiter, so kann man successiv den ganzen Rücken berühren und fühlt überall nur eine Berührung, aber daraus folgt nicht, dass der ganze Rücken nur eine einzige Nervenfaser erhalte.

5) Volkmann habe nachgewiesen, dass eine und dieselbe elementare Nervenfaser des *nervus opticus*, wenn sie gleichzeitig an verschiedenen Orten Eindrücke bekäme, mehrere Empfindungen vermitteln könne, die man ihrem Orte nach zu unterscheiden vermöge.

Hätte dieses Volkmann wirklich nachgewiesen, so müssten wir die Einsicht, die wir über den dem Bau des animalischen Nervensystems zum Grunde liegenden Plan durch die Entdeckung der elementaren Nervenfäden durch Fontana gewonnen zu haben glaubten, als irrig aufgeben. Nachdem nämlich Fontana gefunden hatte, dass die Elementarfäden der animalischen Nerven auf ihrem Wege vom Gehirne zu den Theilen des Körpers keine Aeste abgäben oder aufnähmen, sondern als einfache ungetheilte, ziemlich gleich dicke Fäden dahin gehen und diese Beobachtung durch die Untersuchungen von Prevost, Dumas

und M. Edwards bestätigt worden waren, habe ich*) auf die grosse Wichtigkeit dieser Entdeckung aufmerksam gemacht und gezeigt, dass dieses Resultat der mikroskopischen Anatomie auch durch physiologische Experimente über die Verrichtung der Nerven Bestätigung erhalte. Ich sagte, die Fortpflanzung eines Eindrucks scheine nur durch denjenigen elementaren Nervenfaden, der unmittelbar gereizt werde, zu geschehen und der Reiz scheine sich nicht von einem Nervenfaden auf andere Nervenfäden fortzupflanzen, weil sie unter einander nicht durch ihr Nervenmark zusammen hingen. Durch diese Einrichtung werde bewirkt, dass eine bestimmte Stelle des Tastorgans mit einer bestimmten Stelle des Gehirns durch einen einzigen ungetheilten Faden in Zusammenhang gebracht werde. Es scheine nichts darauf anzukommen, welche Umwege der Nervenfaden unterwegs mache und welche Gegenden er daselbst berühre und in welcher Nervenscheide er mit andern Nervenfäden beisammen liege, aber es scheine viel darauf anzukommen, dass der Ordnung, in welcher die Nervenfäden von der Haut ausgehen, eine zweite Ordnung**) entspreche, in welcher sie sich im Gehirne endigen. Ist nun zwar in neuerer Zeit sehr oft an den peripherischen Enden der Nerven eine Theilung der elementaren Nervenfäden in mehrere Aeste beobachtet worden, und hat man auch hin und wieder eine Theilung in zwei Aeste in grösserer Entfernung von der peripherischen Endigung gefunden, so weiss doch Jeder, der sich mit dergleichen mikroskopischen Zergliederungen der Nerven beschäftigt hat, wie selten diese letztere Theilung vorkommt, und die Theilung der Elementarfäden an ihrer peripherischen Endigung ist der aufgestellten Ansicht nicht nur nicht entgegen, sondern sogar günstig. Ueberhaupt ist die Theilung der Nerven mit jener Ansicht nicht in Widerspruch, wenn die aus der Theilung hervorgehenden Fäden nach der Peripherie und nicht nach dem Gehirne gehen, und wenn man annehmen darf, dass sie zu einem und demselben Stücke der Haut oder zu einem und demselben Muskel gehen.

---

*) Hildebrandt's Handbuch der Anatomie, umgearbeitet von E. H. Weber, Leipzig 1830, Bd. 1, S. 275, 281, 285 und 286.

**) Irgend eine zweite Ordnung, denn es braucht nicht gerade die nämliche zu sein.

Volkmann's oben erwähnter Beweis stützt sich darauf, dass die gesammte Netzhautfläche ungefähr 50mal (nach seinen neueren Berechnungen 600mal) grösser sei, als der Querschnitt des Sehnerven, und dass daher nicht in jedem empfindlichen Punkte derselben die Endigung eines Elementarfadens liegen könne.*) Der Schluss, den Volkmann hierauf gründet, würde richtig sein, wenn die Nervenhaut des Auges in ihrer ganzen Ausdehnung überall sehr empfindlich wäre und daher für gleich nervenreich gehalten werden müsste. Allein nur ein sehr kleiner Theil derselben, welcher ⅓ bis ½ Linie im Durchmesser hat, hat eine grosse Empfindlichkeit, die übrigen Theile derselben sind desto unempfindlicher, je weiter entfernt von der Augenaxe sie liegen, und diese brauchen daher nur wenig Elementarfäden zu erhalten. Wahrscheinlich theilen sich die elementaren Nervenfäden des Sehnerven, welche zu den von der Augenaxe entfernteren Theilen der Nervenhaut gehen, in Aeste. Dagegen endigen sich unstreitig die, welche für die Nervenhaut in der Augenaxe bestimmt sind, ohne sich in Aeste zu theilen.

Kölliker**) hat sich übrigens neuerlich auch überzeugt, dass Volkmann's Gründe nicht ausreichen, die früher aufgestellten Ansichten zu widerlegen.

Kölliker's Auffassungsweise meiner Auseinandersetzung scheint auch Lotze zu einem ähnlichen Missverständnisse und zu ähnlichen Zweifeln angeregt zu haben. Auch er lässt mich behaupten, alle Hautstellen, in deren Bereich die zwei Spitzen eines Cirkels nur einen Eindruck hervorbrächten, wären nur einer und derselben Primitivfaser unterworfen, also gerade das Gegentheil von dem, was ich gesagt. Mit diesem Missverständnisse steht ein anderer von ihm vorgebrachter Grund in Zusammenhange. Er glaubt nämlich, dass die Annahme von Empfindungskreisen mit der Erfahrung im Widerspruche stehe, welche uns lehrt, dass eine auf unserer Haut fortbewegte Spitze die Empfindung von einer continuirlichen Bewegung erwecke; dieselbe müsste uns, wenn es Empfindungskreise gäbe, so lange

*) Siehe den Artikel Tastsinn in R. Wagner's Handwörterbuche der Physiologie, Bd. III, p. 531 und 532.

**) Kölliker Zur Anatomie und Physiologie der Retina, vorgetragen in d. physikalisch-med. Ges. zu Würzburg, 3. Jul. 1852, p. 17.

zu ruhen scheinen, so lange sie bei ihrer continuirlichen Bewegung die Punkte eines und desselben Empfindungskreises berührte und dann plötzlich fortzurücken scheinen, wenn sie von dem einen Empfindungskreise auf den andern überginge. Dieser Einwurf beruht wieder auf der Annahme von Empfindungskreisen von einem sehr grossen Durchmesser, während ich über die absolute Grösse der Empfindungskreise gar nichts ausgesagt habe und man sie sich also so klein denken kann, wie man will. Ich habe nur darüber Auskunft gegeben, dass die Empfindungskreise in manchen Theilen der Haut noch einmal so gross gedacht werden müssten als in andern, und dass sie in noch andern Theilen der Haut, in welchen der Raumsinn noch stumpfer wäre, 5mal, 10mal, 20mal, 30mal, 40mal und sogar 50mal grösser angenommen werden müssten, als in den Theilen der Haut, wo der Raumsinn am feinsten ausgebildet sei. Ich habe ferner gezeigt, dass die Empfindungskreise am Arme und am Beine eine längliche Gestalt zu haben scheinen, und dass der Längendurchmesser in der Länge des Arms liegen möge. Ueberall habe ich daher nur von der verhältnissmässigen Grösse der Empfindungskreise, nicht von der absoluten Grösse derselben gesprochen. Unsere Haut ist keinesfalls ein empfindliches Continuum, auf welchem man die Bewegung als continuirlich empfindet, weil man das Fortrücken jener Spitze auf unendlich kleinen empfindlichen Theilen beobachtet. Sie ist vielmehr ein Mosaik von empfindlichen und unempfindlichen Theilen, und wir schliessen nur auf eine continuirliche Bewegung, wenn die kleinsten empfindlichen Theilchen nach einander in kleinen Zeiträumen von einer Spitze berührt werden.

Endlich hat Lotze bezweifelt, dass die Einrichtung der Nerven, vermöge deren sie aus zahlreichen, sich nur selten in Aeste theilenden Fäden bestehen, für den Raumsinn nothwendig sei und ihm besonders diene. Denn dieselbe Einrichtung finde sich auch bei solchen Nerven, welche dem Raumsinne nicht gewidmet sind, z. B. bei den Gehör- und Geruchnerven. Allein ich habe nicht geläugnet, dass die Eintheilung der Nerven in feine Fäden ausser dem von mir angegebenen Nutzen noch andere nützliche Wirkungen haben könne. Sollten z. B. die Hülfswerkzeuge an den peripherischen Enden der Geruchnerven, welche die Einwirkung der riechbaren Dämpfe auf den Geruchnerven vermitteln, sehr klein sein, so muss es auch zahlreiche sehr

kleine Nervenfäden geben, welche in diese Hülfswerkzeuge eindringen. Sind aber diese Nervenenden nicht auf eine gewisse Weise geordnet und entspricht dieser Ordnung nicht eine gewisse zweite Ordnung derselben im Gehirne, so kann die Schleimhaut der Nase dennoch keinen Raumsinn besitzen.

Die Zweifel, welche Kölliker und Lotze gegen meine Auseinandersetzung aufgestellt haben, lösen sich daher auf eine so einfache und natürliche Weise, dass wohl Niemand daran denken wird, zu der von J. N. Czermak aufgestellten und von Kölliker empfohlenen Hypothese seine Zuflucht zu nehmen. Kölliker sagt: Czermak schreibt jeder Nervenfaser einen gewissen Verbreitungsbezirk zu, wie Weber, lässt aber die Empfindungskreise verschiedener Nerven sich interferiren.« Verstehe ich dieses Wort richtig, so meint er, die Empfindungskreise gränzten nicht bloss an einander, sondern sie deckten sich zum Theil, und an den Orten, wo sie sich deckten, störten sich die daselbst ausgebreiteten Nerven einander in ihrer Function, so dass man dort keine scharfen, räumlich unterscheidbaren Eindrücke erhalten könnte. Allein es ist nicht anzunehmen, dass die Nerven sich so verbreiten, dass sie sich gegenseitig stören und in ihren Wirkungen vernichten.

Ueber den Ort, wo man berührt wird, und über die Richtung, in der man die Glieder bewegt, weiss man ursprünglich nichts.

Mehrere Umstände machen es wahrscheinlich, dass der Mensch nur erst durch Erfahrung den Ort bestimmen lernt, wo er berührt wird, oder überhaupt, wo auf seine Sinne eingewirkt wird, und dass er also, ehe er dieses durch Erfahrung gelernt hat, Empfindungen haben kann, ohne zu wissen, wo die Ursache der Empfindung auf seinen Körper wirkt.

Wir glauben die Körper, die wir zwischen unsere Zähne bringen, da zu fühlen, wo sie unsere Zähne berühren, und doch ist das unmöglich, weil die harte Substanz der Zähne völlig unempfindlich ist. Sind unsere Zähne fest und gesund, so haben wir bei dieser Berührung auch nicht die mindeste Empfindung

an dem Orte, wo die Zahnwurzel die empfindliche Haut berührt, welche die Zahnzelle austapezirt, und wo also die Zähne auf die empfindlichen Theile durch Druck und Bewegung wirken. Man darf daher nicht annehmen, dass es eine Eigenthümlichkeit des Auges sei, dass wir gar nichts an dem Orte fühlen, wo das Licht die empfindlichen Theile desselben berührt, und die Empfindung an einem Orte zu haben glauben, wohin unser Empfindungsvermögen gar nicht reicht, in einer gewissen Entfernung von unsern empfindlichen Theilen, sondern es ist das auch auf der Haut der Fall, sobald wir durch Sonden entfernte Dinge fühlen. Die Zähne wirken nämlich wie Sonden oder Stäbchen, die an empfindlichen Theilen unsers Körpers fest angewachsen sind. Weil wir aber über den Ort, wo wir berührt werden, ursprünglich durch die Empfindung gar nichts wissen, sondern uns erst darüber Vorstellungen bilden müssen, welche auf Erfahrung beruhen, glauben wir die auf uns wirkenden Dinge da zu empfinden, wo sie unserm auf Erfahrung gegründeten Urtheile zu Folge zu sein scheinen. Unser Urtheil associirt sich und verschmilzt auf das innigste mit unsern Empfindungen, so dass wir das, was wir durch Urtheilen erkannt haben, unmittelbar zu empfinden glauben.

Wenn wir ein Stäbchen zwischen unsere Fingerspitze und die Oberfläche des Tisches bringen, so kann sich unser Finger einerseits an dem Stäbchen, andererseits sammt dem Stäbchen auf der Oberfläche des Tisches bewegen. Vermöge der ersten Bewegung fühlen wir mit dem Finger das Stäbchen, vermöge der andern fühlen wir durch das Stäbchen den Tisch. Daher glauben wir ganz bestimmt, gleichzeitig zwei Empfindungen zu haben, die eine an der Oberfläche des Fingers, die andere an dem Ende des Stäbchens, welches den Tisch berührt, ungeachtet es unmöglich ist, an dem letzteren Orte zu empfinden. Machen wir das oben erwähnte Stäbchen am Tische unbeweglich, so fällt die Empfindung, die wir an dem dem Tische zugekehrten Ende des Stäbchens zu haben glaubten, weg und es bleibt nur die an unserer Fingerspitze übrig. Weil die Zähne Sonden sind, die mit den empfindlichen Theilen unsers Körpers fest verbunden sind, so fällt bei ihnen, wenn wir durch sie tasten, gleichfalls die Empfindung ganz weg, die wir an den empfindlichen Theilen haben würden, wenn die Zähne beweglich wären, und es bleibt nur die andere Empfindung übrig, welche wir da zu haben glauben, wo die Zähne die zu befüh-

lenden Dinge berühren. Sind aber die Zähne beträchtlich locker und in der Zahnzelle beweglich, so tritt bei ihnen derselbe Fall ein als bei dem oben erwähnten Stäbchen. Man glaubt dann gleichzeitig zwei Empfindungen zu haben, die eine in der Zahnzelle, die andere an der Oberfläche der Krone.

Wird unser bewegter Finger durch den Widerstand, den uns ein Körper leistet, in seiner Bewegung, die wir wohl kennen, aufgehalten, so werden wir uns bewusst, dass der Körper nicht ein Theil des bewegten Fingers sei, und dasselbe findet statt, wenn unser bewegter Finger von uns an der Oberfläche eines Körpers hingeführt wird und daselbst Widerstand erleidet und Stösse empfängt. Denn gehörte der berührte Körper mit zu unserem Finger, so würde er sich mit ihm zugleich bewegen und keinen Widerstand leisten. Auf dieselbe Weise schliessen wir auch dann auf die Gegenwart eines Objects, wenn ein bewegter Körper unsern ruhenden Finger berührt und dieser jenem Widerstand leistet.

Unter gewissen Umständen können wir mit der Haut sogar die Richtung fühlen, in der wir gestossen oder gezogen werden. Man hat daher, wie gesagt, mit Unrecht darin einen wesentlichen Unterschied zwischen dem Auge und der Haut zu finden geglaubt, dass wir mit dem Auge die Richtung der Lichtstrahlen empfänden, dagegen die Richtung eines gegen die Haut gerichteten Drucks oder Stosses nicht fühlten. Dass wir die Richtung der Lichtstrahlen unmittelbar nicht empfinden, hat schon Porterfield durch denjenigen Scheinerschen Versuch bewiesen, wo man eine dem Auge zu nahe Nadelspitze durch zwei enge nahe bei einander stehende Löcher sieht, die sich in einer Platte befinden, welche man vor das Auge hält. Ich habe den Versuch wiederholt und muss ihn als richtig und als völlig beweisend betrachten. Lichtstrahlen, welche schief aufwärts zur Nervenhaut des Auges gehen, sehen wir in diesem Falle so, als gingen sie schief abwärts zu ihr und umgekehrt. Die Richtung, in welcher wir die Gegenstände sehen, ist ungefähr die des Radius, den wir vom Mittelpunkte des Auges nach dem vom Lichte getroffenen Punkte der Nervenhaut ziehen können. Wir sehen also die Gegenstände, die sich auf der Nervenhaut abbilden, allerdings in einer gewissen Richtung, aber in einer Richtung, die von der der Lichtstrahlen unabhängig und durch die Bewegung des Auges um seinen Mittelpunkt erforscht worden ist.

In den Fällen, wo wir durch die Haut die Richtung fühlen, haben wir dieselbe gleichfalls durch die Bewegung unsers Tastorgans erforscht.

So glauben wir einen senkrecht und sehr nahe vor unser Gesicht gehaltenen glühenden Stab in einer bestimmten Richtung vor uns zu fühlen, wenn wir den Kopf langsam bei verschlossenen Augen abwechselnd rechts und links drehen. Wir nehmen keineswegs die Richtung des Stabs wahr, weil wir die Richtung der Wärmestrahlen empfinden, sondern weil das Wärmebild des Stabs auf unserm Gesichte nur eben so viel Grade hin und zurück wandert, als wir das Gesicht drehen. Läge die Ursache der Wärme nicht in einem äussern Gegenstande, sondern in uns selbst, so würde sich die die Wärme empfindende Stelle der Haut zugleich mit unserm Gesichte drehen und nicht auf der Haut so gesetzmässig hin und her wandern. Wir nehmen an, dass die Ursache der Wärme uns gegenüber liege, und zwar in der Richtungslinie, in welche wir successiv verschiedene Theile der Haut unsers Gesichts bringen.

Wenn an unsern Haaren leise gezogen wird, so fühlen wir nicht nur, wo gezogen wird, sondern wir wissen auch die Richtung ziemlich genau anzugeben, in welcher gezogen wird. Man könnte glauben, unsere Tastorgane wären so eingerichtet, dass wir hierbei die Richtung des auf die Haarbälge wirkenden Zugs unmittelbar wahrnehmen könnten. Dieses ist aber nicht der Fall. Wir empfinden nicht die Richtung des Drucks einer Stricknadel auf unsere ruhende, vollkommen unterstützte Hand, wenn sie bald unter einem rechten, bald unter einem von ihm mehr oder weniger abweichenden Winkel gegen dieselbe gestemmt wird. Eben so wenig können wir unmittelbar die Richtung empfinden, in welcher an unsern Haaren gezogen wird. Ich habe vielmehr durch Versuche bewiesen, dass wir diese Richtung dadurch unterscheiden, dass durch das Ziehen an den Haaren der so sehr bewegliche, auf dem Epistropheus und Atlas balancirende Kopf in Bewegung gesetzt wird, und dass wir diese Bewegung mittelst der Kopf- und Halsmuskeln zu verhindern und aufzuheben suchen und durch das Gefühl der Anstrengung der Muskeln, die wir hierzu brauchen, beurtheilen können, in welcher Richtung der Kopf sich zu bewegen strebt, und daraus auf die Richtung schliessen, in welcher an den Haaren gezogen wird. Hierbei werden wir noch dadurch unterstützt, dass die Haut des Kopfs

sich bei dem Ziehen ein wenig verschiebt und dass wir unwillkührlich diese Verschiebung durch die Hautmuskeln des Kopfs aufzuheben bemüht sind. Der Beweis für diese Behauptung liegt darin, dass die Fähigkeit jene Richtung, in welcher an den Haaren gezogen wird, zu bestimmen, verloren geht, wenn man den Kopf festhalten und dadurch unbeweglich machen lässt, und wenn man zugleich die Verschiebung der Kopfhaut verhindert. Die Federn und die Tasthaare mancher Thiere besitzen selbst Muskeln.

Es ist interessant, dass wir unter den Umständen, wo wir Richtungen fühlen, wie mit zwei Augen, so auch mit zwei Fingern, einen Gegenstand einfach fühlen können, z. B. einen Bleistift, den wir mit zwei Fingern an gegenüberliegenden Stellen fassen, oder sogar zwischen den Fingern rollen, oder eine Kugel, die wir mit zwei Fingerspitzen berühren und dadurch auf dem Tische rollen, unsere Nasenspitze, die wir gleichzeitig mit zwei Fingern befühlen. Weil wir durch die Bewegung der Glieder die Richtung des Drucks unterscheiden, können wir zwei Berührungen als eine empfinden. Wenn ein Anderer z. B. die Kugel an zwei ruhende und unterstützte und dadurch unbewegliche Finger des Beobachters andrückt, ohne dass derselbe von dem Zwecke des Versuchs etwas weiss, so fühlt dieser zwei Berührungen und nimmt nicht wahr, dass er zwei zu einer und derselben Kugel gehörende Segmente betaste.

So wie man nun mit zwei Augen doppelt sieht, wenn man das eine aus seiner natürlichen Lage mit den Fingern verrückt, indem man z. B. leise das untere Augenlid aufwärts drückt, so fühlt man einen Gegenstand doppelt, wenn man die Finger aus ihrer natürlichen Lage in eine solche unnatürliche und ungewohnte versetzt, vermöge deren sie weit über einander geschlagen werden, so dass diejenigen Ränder derselben, die sich sonst einander zugekehrt sind, von einander abgekehrt werden und den zu befühlenden Gegenstand gleichzeitig berühren und befühlen. Wir glauben dann die berührten Theile des Gegenstandes in einer so verschiedenen Richtung zu fühlen, dass sie nach unserem Urtheile nicht einem und demselben Körper angehören können, dieses Urtheil verbindet sich so innig mit der Empfindung, dass wir in zwei verschiedenen Richtungen zwei (z. B. kugliche) Körper zu empfinden glauben.

Auch von der Bewegung unserer Glieder, die wir durch unsern Willen hervorbringen, wissen wir ursprünglich nichts. Wir nehmen die Bewegung

unserer Muskeln durch das ihnen selbst beiwohnende Empfindungsvermögen gar nicht wahr, sondern erhalten nur dann eine Kenntniss von derselben, wenn sie durch andere Sinne wahrgenommen werden kann. Die Taubgebornen, welche ihre Stimme nicht hören, sind eben deswegen stumm, weil sie die Wirkungen mit dem Gehörorgane nicht wahrnehmen, welche die Bewegungen ihrer Stimmmuskeln hervorbringen, und weil sie daher nicht erlernen können, diejenigen Anstrengungen der Muskeln hervorzubringen, welche erforderlich sind, damit ein bestimmter Ton entstehe.

Unter allen Muskeln haben wir die der Stimme und die des Auges am meisten in unserer Gewalt. Wir können hier den Grad der Verkürzung der Muskeln und die dadurch entstehende Spannung, die wir hervorbringen, bis aufs Feinste abmessen. Es handelt sich hierbei um so geringe Grössen der Verkürzung der Muskeln, welche ein Mikroskop und ein Mikrometer erfordern würden, um sie mit Augen deutlich sichtbar und messbar zu machen. Diese Abmessung geht bei den Stimmmuskeln desto mehr ins Feine, je feiner die Wahrnehmung des Unterschieds der Töne durch das Ohr ist. Welche geringe Abänderung der Länge und der Spannung der Stimmmuskeln gehört dazu, damit der Ton von der erforderlichen Reinheit nicht um ein Merkbares abweiche, und dennoch bringt ein geübter Sänger ganze Reihen von Tönen sehr rein hervor! Aber obgleich wir diese Muskeln so ganz in unserer Gewalt haben, so wissen wir doch gar nichts von den Bewegungen, die sie hervorbringen, weil die Theile, die sie bewegen, des Raumsinns (Tastsinns) ermangeln.

Wenn ein Muskel Bewegungen ausführt, ohne sichtbare, hörbare oder fühlbare Veränderungen hervorzubringen, so werden wir uns, wie gesagt, durch das ihm selbst zukommende Empfindungsvermögen seiner Bewegung nicht bewusst. Man sieht das sehr deutlich an den Bewegungen des Zwerchfells. Wir bewegen diese grosse gekrümmte muskulöse Scheidewand, welche die Brust- und Bauchhöhle trennt, willkührlich und üben mit derselben auf die mehrere Pfund schwere Leber, auf die Milz und auf den Magen einen beträchtlichen Druck aus und drängen diese Theile abwärts, so dass die Wand des Bauchs dadurch gespannt wird. Diese Spannung der Haut des Bauchs fühlen wir, aber den Druck, den wir mit dem Zwerchfelle auf die Leber und auf die übrigen genannten Theile ausüben, fühlen

wir weder im Zwerchfelle noch in jenen gedrückten Theilen, weil beide keinen Drucksinn und keinen Raumsinn haben. Wir wissen von der Richtung, in der wir das Zwerchfell bewegen, gar nichts, wir wissen nicht, ob wir es beim Einathmen nach der Bauchhöhle oder nach der Brusthöhle zu bewegen, und würden es gar nicht willkührlich bewegen lernen, wenn wir nicht mit andern Theilen die Wirkungen wahrnähmen, die das Einathmen und Ausathmen hervorbringt.

Es leuchtet hieraus ein, dass wir unsere Glieder mit dem Gesichte und dem Tastsinne beobachten müssen, um zu erfahren, dass sie sich bewegen, und in welcher Richtung.

Damit wir lernen, in welcher Ordnung neben einander die Empfindungskreise auf unserer Haut liegen, müssen sich entweder die einen Eindruck hervorbringenden Dinge bewegen und in einer gewissen Ordnung und Aufeinanderfolge, die sich umkehren und wiederholen kann, andere und andere Theile unserer Haut, z. B. der Hand, afficiren, während die Hand ruhet, oder wir müssen unsere fühlenden Glieder selbst bewegen, während die auf uns Eindruck machenden Dinge ruhen und durch unsere Bewegung bewirken, dass fühlbare Gegenstände ihren Eindruck auf andere und andere Theile der Haut in einer gewissen Ordnung, welche sich umkehren und wiederholen kann, hervorbringen. Hätten wir an unserem Körper nur einen einzigen fühlenden Punkt, so würden wir durch die Empfindungen, die daselbst entständen, nicht auf den Gedanken des Nebeneinanderseins der empfindbaren Gegenstände und der empfindenden Theile unsers Subjects geleitet werden, weder durch die Bewegung der Dinge, noch durch unsere eigne Bewegung, denn wir würden daselbst nur successiv, nicht gleichzeitig, mehrere unterscheidbare Empfindungen erhalten, und es würde ein besonderer nicht leicht vorkommender Zufall nöthig sein, dass sich dieselbe Reihe von Empfindungen vermöge unserer Bewegung mehrmals wiederholte.

Die günstigsten Verhältnisse, unter welchen wir einerseits die Ordnung, in welcher die Empfindungskreise unserer Haut neben einander liegen, kennen, andererseits unsere fühlenden Glieder absichtlich in bestimmten Richtungen bewegen lernen, sind die, welche auf unserer Haut gegeben sind, und die darin bestehen, dass wir unsere fühlenden Glieder auf unserer em-

pfindenden Haut willkührlich bewegen können. Die Kenntniss von der Lage der Empfindungskreise in der Haut und das Vermögen, unsere fühlenden Glieder absichtlich zu bewegen, vervollkommnen sich wechselseitig durch einander. Der Einrichtung, dass wir mittelst des Gefühls in der Haut und mittelst der Augen die Bewegungen unserer Glieder und unsers ganzen Körpers kennen lernen, und nun diese selbst wieder absichtlich zur Wahrnehmung räumlicher Verhältnisse benutzen können, verdanken wir die Erkenntniss der dritten Dimension im Raume. Wir werden uns hierbei unsers intellectuellen Instinkts, vermöge dessen wir uns durch eine ursprüngliche Einrichtung unserer Seele den nach drei Dimensionen ausgedehnten Raum denken können, wenn wir dazu durch Empfindungen Veranlassung erhalten, bewusst.

Ausser der Haut verschafft uns nur das Auge Vorstellungen von räumlichen Verhältnissen.

Ausser den mit dem Tastsinne versehenen Theilen der Haut und Schleimhaut verschafft uns nur das Auge Vorstellungen von den räumlichen Verhältnissen der Dinge. Ihnen verdanken wir es, dass wir unsere Glieder absichtlich nach von uns voraus bestimmten Richtungen bewegen lernen und dass wir unsern Körper (unser Subject) von andern Körpern (von den Objecten) unterscheiden. Alle andere Sinne lassen uns nur dadurch Objecte erkennen, dass sie von dem Tastsinne der Haut und von dem Gesichtsinne unterstützt werden.

Da in der Mundhöhle zwei Sinne ihren Sitz haben, der Geschmacksinn und der Tastsinn, so haben wir daselbst Geschmackempfindungen und nehmen zugleich auch Wärme, Kälte, Druck und die räumlichen Verhältnisse der unsere Zunge berührenden Körper wahr. Wir dürfen vermuthen, dass, wenn in der Mundhöhle nur Organe für den Geschmacksinn, keine für den Tastsinn, vorhanden wären, es sich mit dem Geschmacke wie mit dem Geruche verhalten würde.

Könnten wir nicht die Geruchsempfindungen durch die willkührliche Bewegung unseres Kopfs oder übrigen Körpers, wodurch wir uns der Quelle des Geruchs nähern oder von derselben entfernen, so wie auch dadurch, dass wir das Einathmen be-

schleunigen oder unterdrücken, willkührlich und absichtlich verstärken und schwächen, so würden wir keine Vorstellungen über den Ort, wo die Gerüche herkommen, erlangen. Die wechselnden Gerüche, die uns afficirten, würden in uns zwar die Vorstellung der Zeit, aber nicht die des Raums erwecken, sie würden uns wie wechselnde angenehme und unangenehme Zustände unseres Seins erscheinen, ohne dass wir auf die Unterscheidung der Gerüche als Objecte von uns, als dem fühlenden Subjecte, geführt würden.

Der Tastsinn erstreckt sich nur in den Eingang der Nase eine kleine Strecke hinein, in den dem Geruchsinne dienenden Theilen derselben fehlt er ganz. Man empfindet daselbst, wie ich schon früher gezeigt habe, weder Wärme und Kälte, noch Druck, wohl aber Schmerz. Um dieses durch Versuche, die ein Jeder leicht wiederholen kann, darzuthun, bringe ich die enge Röhre eines kleinen Handblasebalgs in die Nase ein, der eingeblasene Luftstrom erzeugt weder das Gefühl der Kälte, noch das des Drucks. Auf der Haut dagegen empfindet man überall beides, auch in der Mundhöhle und sogar am Gaumen. Ein dünnes, glattes, oben abgerundetes Glasstäbchen bringe ich bis in die höheren Regionen der Nase ein, in welchen sich der Geruchnerv ausbreitet. Dieses Stäbchen bewege ich dann von hinten vorwärts und wieder zurück, und habe daselbst nicht die mindeste Empfindung von der Bewegung desselben und von dem Drucke; wohl aber kann ich daselbst Schmerz empfinden. Nur in der Nähe der Nasenlöcher fühle ich die Temperatur, den Druck und die Bewegung.

Wir sind endlich nicht im Stande, zu unterscheiden, ob wir mit dem rechten oder mit dem linken Geruchorgane riechen, sobald wir unsere Versuche so einrichten, dass uns der Tastsinn am Eingange in die Nase und der Gesichtsinn hierüber nicht belehren können. Ich nehme zwei ganz gleiche, unten zugeschmolzene Glasröhren mit abgerundeten Rändern von geringem Durchmesser, von welchen die eine leer ist, die andere Eau de Cologne enthält. Beide bringe ich gleichzeitig in meine Nase ein, ohne zu wissen, welche Röhre ich in der rechten oder in der linken Hand halte. Alle Versuche, zu unterscheiden, ob ich den Geruch in der rechten oder linken Nasenhöhle empfinde, wenn ich einathme, sind vergebens, und denselben Erfolg haben diese Versuche bei andern Personen.

Auf eine ähnliche Weise verhält sichs mit dem Gehör. Wir unterscheiden zwar in gewissem Grade, von welcher Gegend her der Schall kommt, aber diese Unterscheidung beruht eben so wie bei dem Geruche auf der Veränderung, welche wir in der Schallempfindung durch unsere absichtliche Bewegung hervorbringen können, wenn wir die Ohren durch die Drehung unseres Kopfs bald nach dem Schalle hinkehren, bald davon abwenden. Erst hören wir z. B. bei dieser Drehung den Schall stärker im rechten als im linken Ohre, allmählig wird die Empfindung, jemehr wir den Kopf drehen, mehr und mehr in beiden Ohren gleich, dann fängt die Empfindung bei fortgesetzter Drehung im linken Ohre an stärker zu werden und wird endlich viel stärker, während die im rechten Ohre an Stärke abnimmt. Alle diese Veränderungen der Schallempfindung treten in umgekehrter Ordnung auf, wenn wir den Kopf wieder zurückdrehen. Durch Uebung kommen wir endlich dahin, dass wir in vielen Fällen aus der ungleichen Stärke der Schallempfindung auch ohne uns zu bewegen, die Richtung des Schalls bestimmen können.

Wir überzeugen uns auf diese Weise, dass die Ursache des Schalls sich nicht in uns, sondern ausser uns befinde, und dass er in einer bestimmten Richtung am stärksten auf uns einwirke. Denn wäre die Ursache des Schalls in uns, so würde sie sich mit uns herumdrehen und die Stärke des Schalls würde sich nicht mit der Richtung unserer Ohren abändern. Dass die Stärke der Einwirkung mit bestimmten Graden unserer Umdrehung sich gradweise ändert, und zwar bei der Drehung vorwärts und rückwärts in umgekehrter Ordnung, bringt uns auf den Gedanken, dass unsere Umdrehung die Ursache der Aenderung der Schallempfindung sei und dass die Ursache des Schalls in einer Gegend des Raums ausser uns ruhe.

Aber die Fähigkeit, den Schall mit dem demselben zugekehrten Ohre stärker zu empfinden als mit dem andern, hat, wie es scheint, nicht ihre Ursache im Gehörorgane im engern Sinne des Worts, sondern im Tastsinne der Haut, die bis zum Trommelfelle reicht.

Die von meinem Bruder Eduard Weber angestellten Experimente lehren, dass die Mitwirkung des Trommelfells erforderlich sei, damit wir mit den Ohren die Richtung des Schalls empfinden, und dass dieses Vermögen vernichtet wird, wenn

wir das Trommelfell hindern, seine Dienste zu leisten, z. B. wenn wir den äusseren Gehörgang vollständig mit Wasser füllen und dadurch das Trommelfell transversal zu schwingen verhindern. Während man unter Wasser untertaucht, hört man den Schall im Wasser befindlicher zusammengeschlagener Steine sehr stark, aber sind die Gehörgänge vollständig mit Wasser erfüllt und alle Luft aus ihnen ausgetrieben, so kann man die Richtung des Schalls gar nicht unterscheiden, wenn ein Anderer unter Wasser befindliche Steine nahe oder fern bald vor dem einen, bald vor dem andern Ohre zusammenschlägt.

Die Empfindung, welche die den Ton erzeugenden Schwingungen mittelst der Organe des Tastsinns hervorbringen, vereinigt sich mit der Empfindung, die im Gehörorgane entsteht, zu einer einzigen Empfindung, und so wie wir mit der Zunge den Ort wahrnehmen, wo wir schmecken, und den Körper, der die Geschmackempfindung erregt, unterscheiden, so glauben wir den Ton einer Stimmgabel, deren Stiel wir an einen Zahn anstemmen, an diesem Zahne zu hören, weil der Zahn ein Tastorgan ist. Man darf hieraus vermuthen, dass man mit dem wesentlichen Organe des Gehörs allein ursprünglich räumliche Verhältnisse nicht zu unterscheiden vermöge, wohl aber in einigem Grade, wenn wir uns mit Absicht bewegen gelernt haben, dazu bedürfen wir aber der Unterstützung durch den Tastsinn und durch den Gesichtsinn.

Der Raumsinn im Auge.

So wie wir durch unsere Haut Druckempfindungen und Empfindungen von Wärme und Kälte erhalten und diese Empfindungen zugleich vermöge der besonderen Anordnung der Ursprünge der Nerven im Gehirne und der Endigung der Nerven in dem Sinnorgane dazu benutzt werden, uns räumliche Verhältnisse, Entfernungen und Richtungen wahrnehmen zu lassen, so erhalten wir durch unser Auge Empfindungen von Helligkeit, Dunkelheit und von Farben, und diese Empfindungen werden vermöge ähnlicher Einrichtungen zugleich benutzt, uns Gestalten, Entfernungen und Richtungen wahrnehmen zu lassen. Meine Erfahrung lehrt, dass sich Jemand durch sein Augenmaass auszeichnen und doch zugleich einen sehr unvollkommenen Farbensinn haben kann, so dass er z. B. grün und roth nicht zu unterscheiden ver-

mag. Hiervon liegt die Ursache nicht in der vollkommneren oder unvollkommneren Einübung des Sinnorgans, sondern vielmehr in der ursprünglichen vollkommneren oder unvollkommneren Einrichtung desselben. Man muss daher annehmen, dass die für den Raumsinn getroffenen Einrichtungen in gewissem Grade unabhängig sind von den für die Empfindung der Farben und des Lichts in dem genannten Sinnorgane bestehenden Einrichtungen.

Wie in der Haut, so bestehen auch im Auge die für den Raumsinn getroffenen Einrichtungen darin, dass 1) die zu empfindenden Gegenstände sich auf einer ausgebreiteten empfindlichen Haut abbilden und dass die verschiedenen Punkte dieses Bildes durch Nervenfäden auf verschiedene Punkte des Gehirns einen gesonderten Eindruck hervorbringen, so dass wahrscheinlich diejenigen Nervenenden, welche die Eindrücke auf das Gehirn übertragen, in einer Ordnung liegen, welche der Ordnung auf eine gewisse Weise entspricht, in welcher die vom Bilde im Auge getroffenen peripherischen Enden liegen, wenn sie auch nicht dieselbe Ordnung ist; 2) dass die empfindliche Haut absichtlich bewegt werden kann. Je vollkommener dieses Beides geschieht, desto vollkommener ist der Raumsinn. Auf der Haut entsteht ein Druck- und Temperaturbild, im Auge ein Lichtbild. Dieses Bild ist um so vollkommener, je mehr Punkte des zu empfindenden Gegenstandes auf einer gleich grossen Fläche der empfindsamen Haut sich abbilden, und dann durch Nervenfäden auf verschiedene Punkte des Gehirns einen unterscheidbaren Eindruck hervorbringen. Die Bewegung des Sinnorgans ist um so vollkommener, je mehr wir fähig sind, die Bewegung absichtlich und bis auf sehr kleine Grössen sicher auszuführen. In beiderlei Beziehung übertrifft das Auge die Haut bei weitem, und es erklärt sich dadurch, dass der Raumsinn im Auge in der Gegend der Augenaxe nach meinen Messungen mehr als 200mal feiner ist als der Raumsinn auf dem Theile der Haut, wo er am vollkommensten entwickelt ist, auf der Zungenspitze, und dass er bisweilen, wo das Auge sehr scharf ist, wohl über 400mal feiner sein kann. Wenn ein Körper, oder ein Theil desselben, unsere Haut berührt, so machen viele seiner Punkte keinen Eindruck auf dieselbe, weil sowohl die Haut als auch der zu empfindende Körper uneben sind. Beim Auge dagegen bewirkt das Licht, dass sogar die mikroskopisch kleinen Punkte desselben Körpers sich sämmtlich auf der Nervenhaut

abbilden. Die Punkte des unsere Haut berührenden Körpers machen keine punktförmigen Eindrücke, sondern breiten sich auf eine kleine Fläche der empfindlichen Lage unserer Haut aus, weil sie durch eine unempfindliche Schicht, die Oberhaut, hindurchgeleitet werden müssen. Im Auge dagegen findet unter günstigen Verhältnissen eine solche Ausbreitung beim schärfsten Sehen gar nicht statt, sondern die Punkte des sichtbaren Körpers sind sogar viel grösser als ihr Abbild auf der Nervenhaut des Auges.

In der Haut liegen die Enden der Nervenfäden, mittelst deren die verschiedenen Punkte des Bildes auf das Gehirn einen gesonderten und daher unterscheidbaren Eindruck hervorbringen, weitläuftig, auf der Nervenhaut dagegen liegen sie äusserst dicht.

Die Bewegungen der Finger und anderer Tastorgane können von uns nur im Groben, die Bewegungen des Auges dagegen bis auf mikroskopisch kleine Grössen fein und sicher ausgeführt werden. Um durch Versuche zu finden, wie kleine Bewegungen wir noch mit den Augen mit Sicherheit machen könnten, liess ich Personen, die vorzüglich gute Augen haben, schwarze parallele Linien zählen, die 0,025 Par. Lin. breit und durch eben so breite weisse Zwischenräume von einander getrennt waren.

Ein Beobachter, NN 1, konnte sie mit zwei Augen schon bei einer Entfernung von 9 Par. Zollen vom Auge zählen. Mit einem Auge gelang es ihm nur bei einer Entfernung von 7 Zollen. Wir wollen, um eher zu wenig als zu viel anzunehmen, diese geringere Entfernung als diejenige ansehen, in welcher die Zählung mit zwei Augen mit Sicherheit gelang. Es ergiebt sich dann, dass das Bild einer solchen Linie oder eines Zwischenraums auf der Retina 0,00192 Par. Lin., d. h. nahe $^{1}/_{521}$ Par. Lin. breit war. Nimmt man auch nur an, dass Menschen, die mit weniger scharfen Augen begabt sind, dieselben so zu drehen vermögen, dass der empfindliche Theil der Retina mit Sicherheit um $^{1}/_{100}$ Par. Lin. fortgerückt wird, so ist das schon eine so kleine Bewegung, wozu in der Mechanik eine mikrometrische Vorrichtung nothwendig ist. Die beiden Augen mussten also so um ihren Mittelpunkt gedreht werden, dass successiv die Bilder der Linien auf den in der Augenaxe liegenden Theil der Nervenhaut fielen, d. h. dass der empfindlichste Theil der Nervenhaut regelmässig

um $^1/_{520}$ Par. Lin. fortrückte. So wie ein Mikroskop einen Mechanismus für eine feinere und kleinere und einen zweiten Mechanismus für eine gröbere aber schnellere Bewegung und Einstellung hat, so können auch die Augen durch einen zweiten Mechanismus auf eine schnellere und gröbere Weise horizontal und senkrecht bewegt werden vermittelst der sehr künstlichen Einlenkung des Kopfs auf dem ersten Halswirbel und vermöge der Einlenkung des ersten Halswirbels auf den zweiten. Die Augen sind in zwei Richtungen am geschicktesten, eine solche Bewegung auszuführen, wenn sie sich um eine horizontale Axe in senkrechter Richtung, oder wenn sie sich um eine senkrechte Axe in horizontaler Richtung drehen. Man sollte glauben, eine so kleine, ich möchte sagen mikrometrische Bewegung sei leichter mit einem als zugleich mit zwei Augen auszuführen, aber die Erfahrung lehrt das Gegentheil. Die beiden Augen stören sich einander hierbei nicht nur nicht, sondern sie unterstützen sich einander sogar sehr. Am besten ist es hierbei, das Auge von Linie zu Linie fortzubewegen. Man kann zwar ungefähr 3 Linien mit einem Blicke auffassen und kann dann die Augen mit einemmale um 3 Linien fortbewegen. Allein diese Methode ist unsicher, denn hierbei verliert man häufig die folgende Linie aus dem Gesichte, auf die man die Augen heften will. Der Mechanismus der Augen, der eine so kleine und sichere Bewegung gestattet, besteht darin, dass die Augenhöhle vom Fette, von dem Auge selbst und dessen Organen complett ausgefüllt und vorn durch eine Fascia verschlossen ist. Der Augapfel kann nicht rückwärts bewegt werden, weil das Fett nirgends wohin ausweichen kann, er kann nicht vorwärts bewegt werden, weil nichts vorhanden ist, was den Raum einnehmen könnte, den er dann verliesse. Er dreht sich um seinen Mittelpunkt in einer Höhle, die das Fett für ihn übrig lässt, die man mit einer hohlen Halbkugel vergleichen kann, welche er mit seiner hinteren Hälfte complett ausfüllt und aus der er mit seiner vorderen Hälfte hervorragt. Ein besonderes Muskelpaar, der *rectus externus* und *internus* dreht ihn um eine senkrechte Axe in horizontaler Richtung, ein zweites Muskelpaar, der *rectus superior* und *inferior*, dreht ihn um eine horizontale Axe in senkrechter Richtung. Diese Muskeln besitzen, sowie die schiefen Augenmuskeln, auffallend grosse Nerven.

In dieser bis auf so kleine Theile sichern willkührlichen

Bewegung des Augapfels um seinen Mittelpunkt ist unser Vermögen begründet, sehr genau Grade abmessen zu können, so wie auch die Fähigkeit, jeden Eindruck, der einen bestimmten Theil der Nervenhaut trifft, auf einen bestimmten Ort unseres Gesichtsfelds projiciren zu lernen, nach einer ähnlichen Methode wie die, nach welcher wir einen von uns mit einer Sonde berührten Körper an einem bestimmten Orte des Raumes fühlen lernen.*) Zu der Erklärung, dass uns diese Fähigkeit angeboren sei, dürften wir erst dann unsere Zuflucht nehmen, wenn sich darthun liesse, dass wir sie nicht erwerben können. Daraus, dass Blindgeborne, denen durch eine Operation der Gesichtsinn aufgeschlossen wird, sogleich anfangs jene Projection der Lichteindrücke auf das Gesichtsfeld ausführen**) und die Richtungen des Lichts im Groben unterscheiden können, folgt durchaus nicht, dass uns die Fähigkeit zu dieser Projection angeboren sei. Diejenigen Blindgebornen, welche durch eine Operation sehend gemacht werden können, nämlich die, welche am grauen Staar leiden, sind nicht vollkommen blind. Sie unterscheiden das Helle vom Dunkeln und oft sogar die Hauptfarben.***) Sie be-

---

*) Siehe oben S. 100, 121, 127 und Wagner's Handwörterb. der Physiologie, Art. Tastsinn, Bd. III, p. 483—486.

**) Chesselden (siehe Smith's Optik, übers. von Kästner, Altenburg 1755, p. 40) machte einen Jüngling, der bis zum 13ten Jahre nie hatte sehen können, der jedoch Licht und Finsterniss unterschied und bei starkem Lichte sogar einen Unterschied an den Farben erkannte, durch eine Operation sehend. Da derselbe mit dem einen Auge zum ersten Male sah, sagt Chesselden, konnte er wenig über Entfernungen urtheilen, so dass er sich einbildete, alle Sachen, die er sähe, berührten seine Augen wie das was er fühlte. Das Erstere hat sich durch zahlreiche Beobachtungen an blindgeboren Operirten bestätigt, der letztere Zusatz aber niemals, und es ist daher nothwendig, ihn aus den Handbüchern der Physiologie und Psychologie zu entfernen.

***) S. Beer: Das Auge, Wien 1813, p. 1. Keiner von den Blindgebornen, welche durch Chesselden, Daviel, Janin und Beer sehend gemacht worden sind, waren stockblind. Alle die sehend werden sollen, müssen schon vor der Operation Lichtempfindungen haben. Viele unterschieden sogar die primitiven Farben roth, blau und gelb. Gewöhnlich war es die Verdunkelung der Krystalllinse, woran solche Blindgeborne litten. Einen sehr interessanten Fall, wo die Blindheit von einer vollkommenen Verschliessung der Pupille abhing, hinter der, wie man bei der Operation fand, eine undurchsichtige weisse Substanz befindlich war, hat James Wardrop

wegen ihre Augen sehr viel und in beträchtlichem Grade, richten sie nach dem Hellen oder nach dem Dunkeln aufwärts, abwärts, einwärts und auswärts, und können die Bewegung des Schattens ihrer eignen vor den Augen bewegten Hand sehen. Sehen wir doch die Bewegung des Schattens unserer Hand, wenn wir die Augen geschlossen haben. Sie üben also ihre Augen schon als Blinde und machen die Erfahrung, dass die Hand oben ist, wenn sie sich unten auf der Retina abbildet, eben so wie die Sehenden nur im Groben. Aus dem Umstande, dass sie, wenn sie sehend gemacht worden sind, die Richtungen nur in dem Grade wahrzunehmen im Stande sind, welcher der bisher gehabten Uebung des Auges entspricht, und dass sie nun erst einer neuen Uebung im feineren Gebrauche des Auges bedürfen, um die Richtungen im Feineren unterscheiden zu lernen, beweist im Gegentheile, dass uns die Fähigkeit jener Projection nicht angeboren ist, sondern dass wir sie in dem Grade erlangen, als es die Vollkommenheit der Uebung gestattet. Denn wäre sie uns angeboren, so sähe man nicht ein, warum sie den Blindgebornen nur in dem Grade angeboren sein sollte, als sie dieselbe auch durch Uebung erlangen können.

Die dritte Bewegung, deren der Augapfel fähig ist, die Bewegung um die Augenaxe, oder um eine von der Augenaxe nicht allzusehr abweichende Linie, wird nach meiner Erfahrung nicht benutzt, um Winkel zu messen, welche Linien an einer unserm Auge gegenüber liegenden Wand bilden. Auch bleibt nach meinen Beobachtungen der senkrechte Durchmesser unseres Augapfels nicht senkrecht, während sich unser Kopf um 28° oder weniger zur Seite neigt. Ich muss in dieser Hinsicht Hueck*) widersprechen, der sonst sehr gut über die Bewegung der Augen gehandelt hat, und Ruete und Donders beistimmen.

Ich kann zwar mit den Fingern, aber nicht mit den Augenmuskeln, eine Drehung des Auges um die Augenaxe oder eine ihrer Richtung sich annähernde Linie hervorbringen.

Phil. Transact. 1816, *P. II.* beschrieben. Die Dame, deren anderes Auge kurze Zeit nach der Geburt ganz blind und atrophisch geworden war, konnte zwar nichts von Farben, wohl aber im hellen Sonnen- oder Mondscheine die Richtung, in der die Lichtstrahlen kämen, unterscheiden.

*) Dr. Alex. Hueck: Die Achsendrehung des Auges, Dorpat 1838. 4. p. 31.

Die vier Winkel, welche zwei sich fast rechtwinklich kreuzende Linien bilden, kann man leichter und sicherer vergleichen, wenn die eine Linie senkrecht und die andere horizontal liegt, als wenn die sich kreuzenden Linien schief liegen, ferner leichter, wenn die Schenkel lang, als wenn sie sehr kurz sind. Man bewegt dabei die Augen abwechselnd so, dass sich die senkrechte und dann die horizontale Linie successiv ihrer Länge nach auf dem scharfsichtigsten Theile der Retina abbildet. Das Verfahren und der Erfolg würde ganz anders sein, wenn die Winkel durch eine Drehung der Augen um die Augenaxe gemessen würden.

Die Ursache, warum wir Dinge, die sich seitwärts von der Augenaxe auf der Nervenhaut abbilden, unvollkommen sehen, liegt nicht sowohl in der Unvollkommenheit des daselbst entstehenden Bildes, sondern fast ganz in der geringeren Empfindlichkeit der Retina in jener Gegend.

Wir haben oben gesehen, dass der Raumsinn an der Zungenspitze am feinsten ausgebildet ist und von da nach allen Seiten zu desto stumpfer wird, jemehr man sich von derselben entfernt. Dasselbe Verhältniss findet sich an allen Fingern und eben dasselbe wird auch im Gesichte wahrgenommen, wo der Raumsinn an den Lippen am feinsten ist und nach allen Seiten zu abnimmt. Auf ähnliche Weise ist der Raumsinn auf der Nervenhaut in dem von der Augenaxe geschnittenen Theile bei weitem am schärfsten und nimmt von da nach allen Seiten zu desto mehr an Feinheit ab, jemehr man sich von der Augenaxe entfernt.

Dass man in einiger Entfernung von der Augenaxe auf der Nervenhaut sehr unvollkommen sehe, wusste man schon lange. Allein man war darüber ungewiss, ob die Ursache dieses unvollkommenen Sehens ganz oder hauptsächlich darin liege, dass das in einiger Entfernung von der Augenaxe auf der Nervenhaut entstehende Bild sehr unvollkommen sei. Nach meinen Untersuchungen hat der letztere Umstand keinen beträchtlichen Antheil daran. Rührte die Unvollkommenheit des Sehens daselbst hauptsächlich oder ganz von der Unvollkommenheit des Bildes her, so würde daselbst der Gegenstand undeutlich, nicht aber der Lichteindruck schwach sein. Aber jeder weiss, dass man von der Sonne, wenn ihre Strahlen die Nervenhaut in der Augenaxe

treffen, auf das heftigste geblendet wird, dass man dagegen von ihrem starken Lichte gar nicht geblendet wird, wenn es die Nervenhaut in beträchtlicher Entfernung von der Augenaxe trifft. Im ersteren Falle verengt sich die Pupille sehr stark, im letzteren wenig. Auch die Farben werden von uns seitwärts von der Augenaxe nur sehr schwach empfunden und unvollkommen unterschieden. Meine Untersuchungen über die Beschaffenheit des auf verschiedenen Theilen der Nervenhaut des weissen Kaninchens*) entstehenden Bildes der vor dem Auge in einer passenden Entfernung befindlichen Gegenstände haben mich überzeugt, dass dasselbe in einer grossen Entfernung von der Augenaxe noch so scharf ist, dass man mit unbewaffnetem Auge nicht bemerkt, dass es verwaschen und undeutlich wäre. Auf der andern Seite lehren mich meine Versuche, dass man die kleinste Druckschrift, welche es giebt (Diamantschrift), durch einen Nadelstich in schwarzem Papiere noch gut lesen kann, wenn man dieselbe dem Auge bis auf $\frac{1}{2}$ Par. Zoll nähert, und dass also nicht die äusserste Schärfe des Bilds auf der Retina erforderlich sei, um Gestalten deutlich zu sehen.

Wenn wir also schon das sehr undeutlich sehen, was sich $1\frac{1}{2}$ Par. Lin. weit von der Augenaxe abbildet, z. B. in der Nähe des eintretenden *Nervus opticus*, so liegt die Ursache davon nicht in der Unvollkommenheit des Bildes, denn in einer so geringen Entfernung von der Augenaxe kann nach den an Kaninchenaugen gemachten Erfahrungen von einer merklichen Unvollkommenheit des Bildes nicht die Rede sein.

Ueber die Grösse des Theils der Nervenhaut, mit welchem man scharf genug sieht, um Druckschrift lesen zu können.

Bekanntlich ist nur ein sehr kleiner Theil unserer Nervenhaut mit einem hinreichend scharfen Raumsinne versehen, um

---

*) Man schneidet dem lebenden Thiere den Kopf ab und theilt ihn durch die Säge in eine vordere und hintere Hälfte, bricht an der ersteren den Hintergrund der Augenhöhle auf und entblösst die Sclerotica an der hinteren Seite so weit vom Fette, dass man das dort entstehende verkehrte Bild sehen kann. Den Augapfel und seine Muskeln lässt man anfangs unberührt und öffnet die Augenlider vollkommen oder schneidet sie weg.

daselbst Schrift, wie die vorliegende in diesen Berichten, lesen zu können. Richte ich mein 8½ Par. Zoll entferntes Auge auf die Mitte des Zwischenraums zwischen zwei Zeilen, so kann ich mit unverwandtem Auge einige Buchstaben in der darüber und in der unter dem Zwischenraume gelegenen Zeile lesen, aber in den dann folgenden Zeilen erkenne ich sie nicht. Richte ich ein Auge auf einige Buchstaben einer Zeile, so kann ich die Buchstaben in der nächst höheren und nächst tieferen Zeile mit unverwandtem Blicke nur unvollkommen erkennen. Bei diesen Versuchen kann es uns leicht begegnen, dass wir das Auge ein Wenig bewegen und dadurch mehr sehen, als wir bei unverwandtem Auge sehen würden. Um dieses zu vermeiden, wendete ich auf den Rath meines Bruders Wilhelm Weber den elektrischen Funken an, der, wie ich sehe, auch schon von Volkmann bei einer andern Gelegenheit benutzt worden ist. Wir versuchten im Finstern, während der Entladung einer grossen Leydner Flasche, zu lesen, und bestimmten, wie viel Buchstaben man dann erkennt. Denn da der elektrische Funke keine wahrnehmbare Zeit dauert, sondern momentan ist, so hat der Lesende keine Zeit, seine Augen zu bewegen, sondern erkennt nur die Buchstaben, auf welche das Auge im Momente des entstehenden Funkens gerichtet war, ebenso wie man bei dem elektrischen Funken die Speichen eines sich schnell umdrehenden Rädchens stillstehend erblickt. Der Funke war sehr hell und die Buchstaben waren gross, und da die einmal erweckte Empfindung eine kurze Zeit fortdauert, so hatte man Zeit, die Buchstaben zu lesen. Da nun die Schrift aus einer Sprache war, in der mein Bruder und ich die Worte nicht errathen konnten, so lasen wir nur die Buchstaben, die sich auf dem scharf empfindenden Theile der Nervenhaut abbildeten, und dieser hatte nach der von meinem Bruder gemachten Berechnung einen Durchmesser von ⅓ bis ½ Par. Linie.

Die vom Gehirne und Rückenmarke entspringenden Elementarfäden der Empfindungsnerven reichen bei weitem nicht aus, um die ganze Haut so empfindlich zu machen, als es z. B. die Hohlhand ist. Gewisse Theile der Haut sind daher sehr reichlich, andere minder reichlich, noch andere sehr ärmlich mit solchen Fäden versehen, und der Menge dieser Fäden, die sich auf einem gleich grossen Stücke der Haut verbreiten, scheint daselbst die Feinheit des Raumsinns zu entsprechen Eben so reicht die Zahl

der aus dem Gehirn entsprungenen Elementarfäden des *nervus opticus* bei weitem nicht aus, um die ganze Nervenhaut des Auges so empfindlich zu machen, als es der in der Augenaxe liegende Theil ist. Es scheint daher, dass nur ein sehr kleiner Theil der Nervenhaut, der etwa ⅓ bis ½ Par. Lin. im Durchmesser hat, mit sehr zahlreichen Nervenfäden dieser Art versehen sei, und dass auch an dieser kleinen Stelle die Verbreitung solcher Nervenfäden nicht gleich dicht sei, nämlich am dichtesten in der Augenaxe selbst. Die Fäden des Sehnerven des Auges, deren Durchmesser nach meinen Messungen im Mittel ungefähr 5—6 mal kleiner ist, als der der Tastnerven der Haut, sind in der Nervenhaut so schwer zu verfolgen, dass wir die Frage, ob sie sich bei ihrer Ausbreitung in Aeste theilen und ob das in der Augenaxe und in der Nähe derselben nicht der Fall sei, direct nicht entscheiden können. Aus physiologischen Gründen ist es aber wahrscheinlich, dass eine Theilung in Aeste da, wo das sogenannte Centralloch sich befindet, nicht stattfinde, sondern dass daselbst äusserst dünne bis zum Gehirn gehende Nervenfäden in grosser Zahl endigen.*)

---

*) An dem Auge eines Selbstmörders, das ich im November 1847 kurze Zeit nach dem Tode desselben untersuchte, war das sogenannte Centralloch sehr vollkommen rund und hatte, während die Nervenhaut ausgespannt war, $^1/_{14}$ bis $^1/_{15}$ Par. Lin. im Durchmesser. Es besass keine bestimmte Gränze, sondern ging allmählig in den dasselbe umgebenden gelben Fleck über. Die Nervenhaut ist an dieser Stelle so durchsichtig, dass es mir nicht gelungen ist, die Theile, aus welchen sie besteht, durch das Mikroskop zu unterscheiden. Dennoch kommt sehr viel darauf an, an dieser Stelle den Bau der Nervenhaut genau kennen zu lernen. Längere Zeit nach dem Tode, nachdem sich die sogenannte Falte gebildet hat, ist bisweilen das Centralloch nicht darstellbar. Man hat aber deswegen kein Recht, an dessen Vorhandensein zu zweifeln; die sich faltende Nervenhaut kann so zusammenkleben, dass die Darstellung dieser durchsichtigen runden Stelle der Nervenhaut nicht gelingt. Ueberhaupt muss die Nervenhaut in den Grad der Ausspannung versetzt werden, die sie während des Lebens hat, um das Centralloch zu sehen. An einem halbirten, von Innen betrachteten Auge darf man das Centralloch nicht in seiner wahren Gestalt zu sehen hoffen.

Ueber die mit den Fäden des Sehnerven in Verbindung stehenden Hülfsorgane, welche bewirken, dass das Licht Bewegung in den Nerven hervorbringen kann.

Die Ursache der ausserordentlichen Schärfe des Sehens in der Gegend, wo die Augenaxe die Nervenhaut schneidet und warum sie nach allen Richtungen von da aus schnell abnimmt, ist durch anatomische Untersuchungen sehr schwer auszumitteln. Ich suche dieselbe, wie gesagt, in der ungleichen Vertheilung der vom Gehirn entspringenden elementaren Nervenfäden des Sehnerven.

Ich habe in der Lehre vom Tastsinn bewiesen, dass die Nervenstämme der Haut uns nicht die Empfindungen von Wärme und Kälte verschaffen, wenn Wärme und Kälte unmittelbar in sie eindringen, sondern dass zu vermuthen sei, dass die Elementarfäden derselben mit gewissen Hülfsorganen in Verbindung ständen, welche durch die Wärme und Kälte eine den Graden derselben entsprechende Veränderung erlitten und durch diese Veränderung in den Nervenfäden eine diesen Graden entsprechende Nervenbewegung hervorriefen.

Eben so habe ich geläugnet, dass der *Nervus opticus*, wenn er unmittelbar vom Licht getroffen würde, uns Lichtempfindungen verschaffen könne. Helmholz hat mittelst seines Augenspiegels dargethan, dass das Licht tief in die Eintrittsstelle des Sehnerven hineinscheine, und dass man dabei, wie seit Mariotte bekannt ist, keine Empfindung des Lichts habe. Um die Vorstellung von solchen Hülfsorganen an den Enden der Nerven zu erläutern, wollen wir einstweilen annehmen, in allen Empfindungsnerven entstünde, wenn sie Empfindung vermitteln, eine elektrische Bewegung, die durch ihre Verschiedenheit nicht nur im Allgemeinen Lichtempfindung, Wärmeempfindung, Schallempfindung u. s. w. in unserm Bewusstsein hervorriefe, sondern auch den Graden des Lichts, der Wärme, des Schalles und der Modificationen derselben, den Farben und den Tönen entsprechend modificirt würde. Dass hierzu künstliche Hülfswerkzeuge erforderlich sind, leuchtet einem Jeden ein. Solche Hülfswerkzeuge im Auge scheinen die durchsichtigen dickeren und dünneren, wie Radien aufgestellten Stäbchen in der Retina zu

sein,*) die nach H. Müller's und Kölliker's Beobachtung durch gerade einwärts gehende Fäden, mit den zellenartigen Elementen der Nervenhaut zusammenhängen. Die Opticusfasern, die eine concentrische Schicht in der Nervenhaut bilden, kreuzen sich mit den Fäden der Stäbchen, in deren Zwischenräumen sie laufen. Ihre Endigung ist unbekannt, doch darf man vermuthen, dass sie mit den Stäbchen oder deren Enden in irgend einer Verbindung stehen.

Wie nun die Stäbchen zu bewirken im Stande sind, dass die transversale Schwingung des Aethers eine Bewegung in den Nerven hervorrufe und warum die gleichzeitig vorhandene longitudinale Aetherschwingung nicht empfunden wird, muss so lange ein Geheimniss bleiben, so lange wir nicht wissen, von welcher Art die Bewegung in den Nerven sei. Eben so ist auch keine Hoffnung vorhanden, die Frage zu entscheiden, ob die Opticusfasern in die Stäbchen selbst eindringen, oder nur mit ihrer Oberfläche in Berührung kommen, denn man ist bis jetzt nicht einmal im Stande gewesen, diese Frage bei den durchsichtigen Säulchen des elektrischen Organs einiger Fische zu entscheiden, die ungeachtet ihrer colossalen Grösse eine gewisse Aehnlichkeit mit den Stäbchen haben. Da die Stäbchen so sehr leicht quer abbrechen und also in querer Richtung leicht spaltbar sind, so haben sie vielleicht auch wie diese einen lamellösen Bau. In dem elektrischen Organe wirken die Nerven auf die Säulchen und veranlassen in denselben eine Scheidung der Elektricitäten und also eine Bewegung derselben, in der Stäbchenschicht der Nervenhaut wirken vielleicht die Stäbchen, die als dünne Säulchen zu betrachten sind, wenn sie vom Lichte durchstrahlt werden, auf die Nerven und können vielleicht eine Bewegung der Elektricität in diesen hervorrufen.

Für die Annahme, dass die dickeren und dünneren Stäbchen für Hülfswerkzeuge zu halten sind, die mit den Opticus-

*) Sehr interessant ist die Entdeckung Henle's, welche Kölliker bestätigt hat, dass an der Stelle, wo das deutlichste Sehen stattfindet (an dem gelben Flecke nebst dem sogenannten Centralloche), keine dünnen freien Stäbchen, sondern nur dicke Stäbchen (*Coni*, Zapfen, ovale Körper) gefunden werden, welche so dicht neben einander liegen, dass es so aussieht, als ob sie an manchen Stellen unter einander verschmolzen wären. Zeitschrift für rationelle Medicin, neue Folge, Bd. II, p. 307 u. 308.

fasern in irgend einer Verbindung stehen und die Einwirkung des Lichts auf die Nerven vermitteln, spricht Folgendes:

1) Dass sie so gestellt sind, dass das Licht ihrer Länge nach in sie hineinscheinen kann;

2) dass sie, wie Hannover*) und Huschke**) anführen und Kölliker***) bestätigt, an der Eintrittsstelle des Sehnerven fehlen, und dass sie also, wie Kölliker bemerkt, überall, wo wir auf der Retina Lichtempfindungen haben, vorhanden sind, und nur an dem einzigen Theile der Retina fehlen, wo wir das Licht nicht empfinden, ungeachtet es die Fäden des Sehnerven trifft;

3) dass nicht daran zu denken ist, dass die concentrische Schicht der Opticusfasern unmittelbar und ohne die Unterstützung besonderer Hülfswerkzeuge durch das quer durch sie hindurchgehende Licht afficirt würde und Lichtempfindungen vermittelte, da dann die Lichtempfindungen an den Theilen der Retina am stärksten sein müssten, wo die concentrische Lage der Opticusfasern am dicksten ist, was nicht der Fall ist. Kölliker behauptet sogar, dass jene concentrische Lage in der Region der Augenaxe, wo wir das Licht am stärksten empfinden, fehle und daselbst sich nur einzelne Bündel von Nervenfasern zwischen die dicken und äusserst dicht liegenden Stäbchen verbreiteten.

Ueber die Feinheit des Raumsinns auf der Nervenhaut in der Gegend der Augenaxe.

Ich habe durch meine Untersuchungen über die Feinheit des Raumsinns in verschiedenen Regionen der Haut gezeigt, dass man dieselbe nicht dadurch messen könne, dass man untersucht, wie klein ein Theil der Haut sein müsse, damit man die Berührung desselben nicht mehr fühlen könne. Denn die Erfahrung lehrt, dass wir auf der ganzen Haut die Berührung mit der feinsten Nadelspitze fühlen. Ich habe vielmehr bewiesen, dass man untersuchen müsse, wie weit von einander entfernt zwei

*) Hannover, das Auge. Leipzig 1852, p. 81.

**) Huschke, Sömmering Lehre von den Eingeweiden. Umgearbeitet von Huschke. Leipzig 1844, 717. 724.

***) Kölliker, zur Anatomie und Physiologie der Nervenhaut. Sitzung der physic.-med. Ges. zu Würzburg vom 3. Juli 1852.

gleichzeitig berührte Theile der Haut liegen müssen, damit man den Zwischenraum zwischen ihnen zu empfinden im Stande sei und also zwei durch einen Zwischenraum getrennte Berührungen wahrnehmen. An der Mitte des Oberarms, wo man auf jedem Punkte die Berührung mit einer Nadelspitze fühlt, nehmen wir den Zwischenraum von 1 bis 2 Zollen nicht wahr, der zwei uns daselbst berührende Cirkelspitzen trennt. Wir glauben vielmehr eine einzige Berührung zu fühlen.

Auf eine ähnliche Weise verhält es sich nun auch mit der Messung der Feinheit des Raumsinns im Auge. Es ist eine ganz falsche Methode, wenn man untersucht, wie klein der vom Lichte berührte Theil der Retina sein müsse, damit man nichts davon empfinde, oder mit andern Worten, wie klein der Gesichtswinkel sein müsse, damit wir einen Gegenstand, der uns unter einem solchen Winkel Licht zusendet, nicht mehr sehen können: denn die Erfahrung lehrt, dass, wenn das Licht stark genug ist, jener Winkel unmessbar klein sein kann und der Lichteindruck doch empfunden wird. So werden z. B. die Fixsterne gesehen, die sogar bei der Vergrösserung durch Fernröhre keinen Durchmesser zeigen, und also unter einem unmessbar kleinen Gesichtswinkel erscheinen. Und warum sollte ein Lichteindruck, der nicht ein ganzes Nervenende, sondern nur einen Punkt eines Nervenendes trifft, nicht gesehen werden, wenn er nur stark genug ist? Der Eindruck kann sich dann dem ganzen Nervenende mittheilen. Wir müssen daher auch bei dem Auge durch Versuche zu finden suchen, wie weit zwei deutliche Lichteindrücke auf der Nervenhaut des Auges von einander entfernt sein müssen, damit wir einen Zwischenraum zwischen ihnen wahrnehmen können. Wiewohl eine gewisse Stärke der Lichteindrücke nöthig ist, um den Zwischenraum zwischen ihnen wahrzunehmen, so kann sie doch nicht bewirken, dass ein Zwischenraum sichtbar werde, der wegen der zu geringen Zahl der sich an dem Theile verbreitenden Nervenfäden nicht empfunden werden kann. Eine sehr grosse Stärke der Lichteindrücke würde das Unterscheiden des Zwischenraums nicht nur nicht erleichtern, sondern sogar erschweren, wegen einer physicalischen und vielleicht auch wegen einer physiologischen Irradiation, vermöge deren ein heftiger punktförmiger Lichtreiz einen Eindruck auf das Gehirn hervorzubringen scheint, der sich auf die benachbarten Hirntheile verbreitet.

Ein gleichseitiges Viereck ist bekanntlich bei weitem nicht aus einer so grossen Entfernung sichtbar als eine Linie, die so breit ist, als eine der Seiten des Vierecks, denn die Eindrücke, welche die der Länge nach neben einander liegenden Theile der Linie machen, summiren sich zu einem stärkeren Eindrucke. Ist daher der Gesichtswinkel, unter welchem ein gleichseitiges Viereck gesehen wird, zu klein, d. h. ist der Lichteindruck, den es hervorbringt, zu schwach, um noch aus einer gewissen Entfernung empfunden zu werden, so ist doch der Lichteindruck einer Linie von derselben Breite noch hinreichend gross.

Nach meinen Versuchen kann eine weisse Linie auf schwarzem Grunde aus einer mehr als dreimal so grossen Entfernung gesehen werden, als ein gleichseitiges Viereck von der Breite der Linie, und die Helligkeit der Erleuchtung der Linie und ein sehr abstechender Hintergrund kann diese Entfernung noch vergrössern. Dagegen werden zwei weisse, gleichseitige Vierecke auf schwarzem Grunde, die durch einen schwarzen Zwischenraum von einander geschieden sind, der eben so breit ist als die Vierecke, aus einer Entfernung noch als zweie unterschieden, die derjenigen beinahe gleich ist, aus welcher zwei weisse Linien auf schwarzem Grunde noch als zweie unterschieden werden, die eben so breit sind als jene Vierecke, und durch einen eben so breiten schwarzen linienförmigen Raum von einander getrennt werden.

Beobachtungen
über den Abstand zweier Bilder auf der Retina von einander, bei welchem dieselben allenfalls noch als zwei unterschieden werden können.

1) Wie Smith*) in seiner Optik berichtet, erscheinen nach Hoock, dem Zeitgenossen Newton's, zwei Sterne, welche im Auge einen Winkel von weniger als 30 Secunden machen, stets wie ein einziger Stern, und von Hunderten kann kaum einer die beiden Sterne unterscheiden, wenn der Winkel weniger als 60 Secunden beträgt. Berechnet man für 60 Sec. die Grösse des Zwischenraums, durch den die beiden Bilder auf der Nervenhaut von einander getrennt sind, so findet man ihn 0,00196 oder $^1/_{510}$ Par. Lin.

---

*) Smith's Optik, übers. v. Kaestner, S. 29.

2) Tobias Mayer*) beobachtete parallele schwarze Linien auf weissem Grunde, die $^{36}/_{100}$ Par. Lin. breit waren und durch weisse Zwischenräume von derselben Breite von einander getrennt wurden. Bei 11 Par. Fuss Entfernung vom Auge erschienen sie schon etwas confus, bei 12 Fuss Entfernung wurden sie nur noch mit grösster Anstrengung empfunden, und bei einer ein Wenig grösseren Entfernung verschwanden sie ganz und der Raum erschien aschgrau. Der Gesichtswinkel, unter welchem die weissen linienförmigen Zwischenräume bei einer Entfernung von 11 Fuss gesehen wurden, betrug 47 Sec. Auf der Retina wurden daher die Bilder der Linien durch weisse linienförmige Zwischenräume geschieden, deren Breite, wie ich hier hinzufügen will, 0,00153 Par. Lin. oder $^{1}/_{653}$ Par. Lin. betrug. Der Zwischenraum befand sich unter diesen Umständen nahe 4400mal so weit vom Auge entfernt als seine Breite betrug.

3) Tobias Mayer beobachtete viele weisse gleichseitige Vierecke, deren Seiten $^{44}/_{100}$ Par. Lin. breit waren und die von einander durch ein schwarzes Gitter getrennt wurden, dessen Linien auch $^{44}/_{100}$ Lin. breit waren. Erst in einer Entfernung von $15^{1}/_{2}$ Par. Fuss schien die Schwärze gleichmässig verbreitet, so dass man zweifeln konnte, ob etwas Weisses darin eingeschlossen sei. Der Gesichtswinkel, bei welchem die weissen Vierecke unsichtbar wurden, betrug nach Mayer 40 Sec., das Bild derselben auf der Retina 0,00130 Par. Lin. oder $^{1}/_{761}$ P. Lin. Die Vierecke befanden sich unter diesem Verhältnisse 4845mal so weit vom Auge, als die Grösse einer ihrer Seiten betrug.

4) Tobias Mayer fand, dass weisse gleichseitige Vierecke die mit schwarzen gleichgrossen Vierecken, wie auf einem Damenbrette, abwechselten und deren Seiten $^{52}/_{100}$ Par. Lin. lang waren, nur noch bei 12 Fuss Entfernung vom Auge gesehen werden konnten, und dass sie verschwanden, wenn das Auge ein Wenig mehr entfernt wurde. Der Gesichtswinkel, bei welchem die Vierecke unsichtbar wurden, betrug 62 Sec., das Bild eines viereckigen Zwischenraums auf der Retina hatte Seiten, die 0,00202 Par. Lin. oder $^{1}/_{495}$ Par. Lin. betrugen, und die Vierecke fanden sich ungefähr 3323mal so weit vom Auge, als sie breit waren.

5) Volkmann*) spannte Spinnwebfäden in 0,0052 Zoll

*) *Tob. Mayer* in *Commentarii Soc. reg. Scientiarum Gottingensis. Tom. IV.* 1754, *p.* 102 *sq.*

**) Volkmann, Art. Sehen in Wagner's Handw. d. Physiol. B. III, p. 331.

Distanz von einander auf und sah sie noch als zwei Fäden in 7 Zoll Entfernung, aber nicht weiter. Sie waren also äusserstenfalls noch sichtbar in einer Entfernung, die mehr als 1346mal so gross war, als der Abstand der Fäden von einander. Der Gesichtswinkel war, wenn die Dicke der Fäden vernachlässigt wird, 147,5 Sec. Volkmann berechnete die Distanz der auf der Nervenhaut abgebildeten Fäden zu 0,00037 Par. Zoll oder, in Linien ausgedrückt, 0,00477 Par. Lin., d. h. nahe $\frac{1}{210}$ P. Linie.

6) Dieselben Spinnwebfäden in demselben Abstande von einander sah ein scharfsichtiger Freund Volkmann's noch als zwei in 13 Zoll Entfernung, d. h. in einer Entfernung, die 2500mal so gross war, als der Abstand der Spinnwebfäden von einander. Der Gesichtswinkel war hiernach 80,4 Sec. Volkmann berechnete die Distanz der auf der Nervenhaut abgebildeten Fäden zu 0,00021 P. Zoll oder, in Linien ausgedrückt, 0,00262 P. Lin., d. h. nahe $\frac{1}{382}$ P. Lin.

Ich wählte zu diesen Bestimmungen schwarze Linien, welche durch Maschinenstich sehr eng und gleichmässig gezogen und auf weissem Papiere gedruckt waren. Sie waren 0,025 P. Lin. breit und eben so breit waren die Zwischenräume zwischen ihnen. Die Schmalheit der Linien und ihrer Zwischenräume war absichtlich so gewählt, dass sie von Menschen, die gute Augen haben und weder kurzsichtig noch weitsichtig sind, ohne eine beträchtliche Accommodation der Augen, d. h. also in der günstigsten Entfernung für das deutliche Sehen, noch unterschieden wurden und zu verschmelzen anfingen, damit der Versuch nicht unsicher würde durch entstehende Zerstreuungskreise oder verwickelt durch die Veränderungen, welche das Auge bei der Accommodation erleidet.

7) Th. Weber erkannte die Linien noch in einer Entfernung von 9 P. Zoll, $2\frac{1}{2}$ Lin., d. h. in einer Entfernung, die 4420mal grösser war, als die Breite eines Zwischenraums zwischen den Rändern zweier Linien. Der Gesichtswinkel, unter welchem ein solcher Zwischenraum gesehen wurde, betrug 45,3 Sec. und die Breite des Zwischenraums im Bilde auf der Retina 0,00148 P. Lin., d. h. $\frac{1}{676}$ Par. Lin.

8) u. 9) Dieselben Linien und Zwischenräume wurden noch von mehreren Andern betrachtet. Die grösste Schärfe der Augen zeigte sich in der nebenstehenden Tabelle, wo die erwähnten Beobachtungen zusammengestellt sind in Nr. 8.

Name des Beobachters.	Gegenstände, welche gesehen wurden.	Entfernung vom Auge, in welcher der Zwischenraum noch nicht ganz verschwand.			Wie vielmal der Zwischenraum um seine Breite vom Auge entfernt war.	Gesichtswinkel, unter welchem der Zwischenraum gesehen wurde.	Grösse des Bildes des Zwischenraums auf der Retina.
		P. Fuss	P. Zoll	P. Lin.	Mal	Secund.	Par. Lin.
1) Hoock	Zwei Fixsterne	—	—	—	—	60	0,00196 oder nahe $^1/_{510}$
2) Tob. Mayer	Parallele schwarze Linien auf weissem Papier, die $^{36}/_{100}$ P. Lin. breit u. durch weisse Zwischenräume von derselben Breite geschieden waren	11	—	—	4400	47	0,00153 „ „ $^1/_{653}$
3) Tob. Mayer	Viele weisse gleichseitige Vierecke, deren Seiten $^{44}/_{100}$ P. L. breit waren u. die von einander durch ein schwarzes Gitter getrennt wurden, dessen Linien auch $^{44}/_{100}$ P. Lin. breit waren	15	6	—	4845	40	0,00130 „ „ $^1/_{761}$
4) Tob. Mayer	Gleichseitige schwarze u. weisse Quadrate, mit einander abwechselnd, wie auf einem Damenbrette, deren Seiten = $^{52}/_{100}$ P. Lin.	12	—	—	3323	62	0,00202 „ „ $^1/_{495}$
5) Volkmann	Zwei Spinnwebfäden, deren Distanz von der Axe des einen bis zu der des andern Faden 0,0052 P. Zoll betrug	—	7	—	1346	147,5	0,00477*) „ „ $^1/_{210}$
6) NN. bei Volkmann	Dieselben Spinnwebfäden	—	13	—	2500	80,4	0,00262**) „ „ $^1/_{382}$
7) Th. Weber bei E. H. Weber	Schwarze parallele, 0,025 P. Lin. breite Linien mit eben so breiten weissen Zwischenräumen	—	9	$2^1/_2$	4420	45,3	0,00148 „ „ $^1/_{676}$
8) NN 1 bei E. H. Weber	Dieselben Linien und Zwischenräume	—	11	6	5520	36,5	0,00119 „ „ $^1/_{840}$
9) NN 2 bei E. H. Weber***)	Dieselben Linien und Zwischenräume	—	9	$2^1/_2$	4420	45,3	0,00148 „ „ $^1/_{676}$

*) Nach Volkmann's eigner Berechnung, der 0,00037 P. Zoll angiebt. **) Nach Volkmann's Berechnung, der 0,00021 P. Zoll angiebt.

***) Bei der Berechnung aller Angaben ist auch Listing's „Mathematische Discussion des Gangs der Lichtstrahlen im Auge" in Wagner's Handwörterb. d. Physiol. Bd. IV. berücksichtigt worden. Der Abstand des Brennpunkts in der Retina F'' von dem Kreuzungspunkte od. Knotenpunkte der Hauptstrahlen D' ist nach Listing p. 496 $F'' - D' = 15^{mm}$ 1774, und der Abstand der Hornhaut (bei Listing mit N⁰ bezeichnet) = 7^{mm} 4696 = 3,31 Lin. angenommen.

Aus dieser Tabelle ergiebt sich, dass die von mir veranstalteten Beobachtungen, wobei Linien genommen wurden, die so fein und eng waren, dass sie noch innerhalb der Entfernung, in welcher das scharfe Sehen ohne Accommodation des Auges stattfindet, unter einander zu verschmelzen anfingen, mit denen von Tob. Mayer, wo die Linien so dick und so weitläuftig waren, dass sie erst in einer Entfernung von 11 Par. Fuss unter einander zu verschmelzen anfingen, sehr gut übereinstimmen. Nach den Versuchen von Volkmann scheint die Feinheit des Raumsinns viel geringer zu sein. Dieses rührt unstreitig daher, dass die Spinnwebfäden verhältnissmässig zu ihrer geringen Dicke zu weitläuftig lagen. Denn unter diesen Umständen sind wohl die Zwischenräume gross genug, um sie aus grösserer Entfernung, als die hier angewendete, noch wahrzunehmen, aber die Fäden sind zu dünn, um sie in einer solchen Entfernung zu sehen.

Aus Tob. Mayer's Versuchen sub 2, 3 und 4 ergiebt sich, dass schwarze und weisse Vierecke bei einem grösseren Gesichtswinkel unter einander verschmelzen, wenn die weissen Vierecke und eben so die schwarzen, wie bei einem Damenbrette, mit den Scheiteln der Winkel aneinander gränzen, als wenn die weissen Vierecke ringsum durch ein aus schwarzen Linien gebildetes Gitter von einander getrennt werden, dessen Linien so breit sind, als die Seiten der Vierecke, und dass Vierecke unter den letzteren Verhältnissen bei einem kleineren Gesichtswinkel untereinander verschmelzen, als schwarze parallele Linien, die mit weissen linienförmigen Zwischenräumen von derselben Breite abwechseln.

Aus meinen Versuchen und aus dieser Tabelle finde ich, dass ein sehr empfindliches und scharfes Auge dazu gehört, um noch Zwischenräume bei einem Gesichtswinkel von 40 Secunden zu unterscheiden. Denn bei den unter Nr. 7 bis 9 mitgetheilten Versuchen waren nur Personen benutzt worden, die vorzüglich gute Augen hatten. Der höchste Grad von Schärfe des Auges, den ich gefunden habe, ist der unter Nr. 8 bemerkte, wo die Zwischenräume noch wahrgenommen wurden, wenn sie unter einem Gesichtswinkel von 36,5 Secunden gesehen wurden, unter diesen Umständen waren die Bilder der Zwischenräume auf der Nervenhaut 0,00119 und also $^1/_{840}$ P. Lin. breit. Meine eignen Augen gehören zu denen, bei welchen der Gesichtswinkel des Zwischenraums mehr als 60 Secunden betragen

muss, um zwei Eindrücke auf der Nervenhaut von einander zu unterscheiden.

Bei den schärfsten Augen, die ich gefunden habe, würde daher der Raumsinn auf dem am feinsten fühlenden Theile der Nervenhaut, in der Gegend der Augenaxe, unter sehr günstigen Umständen ungefähr 840mal feiner, als an den Fingerspitzen, und ungefähr 420mal feiner, als an der Zungenspitze sein, welche unter allen Theilen der Haut den feinsten Tastsinn hat. Bei minder scharfen Augen wird man daher rechnen können, dass er 400- bis 600mal schärfer ist, als an den Fingerspitzen, und 200- bis 300mal feiner als an der Zungenspitze.

Bei dieser Vergleichung der Tastorgane mit dem Auge ist nicht zu übersehen, dass sie von mir nur hinsichtlich desjenigen Sinnes unter einander verglichen worden sind, den sie beide besitzen, hinsichtlich des Raumsinns, dass sich aber die Feinheit der qualitativ verschiedenen Sinne, die in diesen Organen ihren Sitz haben, nicht so vergleichen lässt, d. h. dass man nicht die Feinheit des Farbensinns mit der Feinheit des Temperatursinns oder mit der Feinheit des Drucksinns vergleichen kann.

Da ich bei einem Menschen 18 Stunden nach dem Tode im Sehnerven viele nicht varicöse Elementarfäden fand, die 0,0007 bis 0,001 Par. Lin., d. h. ungefähr $\frac{1}{1428}$ bis $\frac{1}{1000}$ Par. Lin. im Durchmesser hatten, so ist kein hinreichender Grund vorhanden, zu läugnen, dass der feinfühlende Theil der Nervenhaut in der Augenaxe, der ungefähr $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ Lin. im Durchmesser hat, seine feine Empfindlichkeit den uns bekannten elementaren Nervenfäden des Sehnerven verdanken könne.

Ueber die Ursachen, warum wir an dem Theile unsers Sehfelds, welcher sich auf der blinden Stelle der Retina abbildet, keine Unterbrechung der Empfindungen wahrnehmen.

Einen Zwischenraum zwischen den unsere Haut berührenden Körpern nehmen wir, wie aus den mitgetheilten Untersuchungen über den Raumsinn der Haut erhellt, auf eine doppelte Weise wahr:

1) indem wir unsere fühlenden Organe bewegen, und zuerst den einen Körper und hierauf nach Vollendung einer gewissen Bewegung den andern berühren. Unter diesen Umständen messen wir den Zwischenraum durch die Bewegung, welche nöthig war, um nach der Empfindung des einen Körpers zu der des andern zu gelangen;

2) ohne unsere fühlenden Organe zu bewegen, wenn beide Körper unsere Haut an von einander entfernten Orten berühren und wir uns bewusst sind, dass eine Anzahl fühlender Theile unserer Haut zwischen den berührten Theilen derselben liegen, auf welchen wir die beobachtete Berührung vermissen. Auf diese letztere Weise glauben wir die räumliche Entfernung der uns berührenden Körper wirklich zu empfinden, während wir auf die erstere Weise nur durch ein Urtheil, in welches auch unsere Vorstellung von der Geschwindigkeit unserer Bewegung mit eingeht, eine Vorstellung von der Entfernung erlangen. Der Zwischenraum scheint uns, wenn wir die Entfernung empfinden, um so grösser, je mehr Theile der Haut, welche uns eine separate Empfindung verschaffen können, dazwischen liegen.

Aus dieser letzteren Erfahrung geht hervor, dass die empfindungslosen Theile unserer Haut, so wie auch diejenigen Theile derselben, die uns keine separate Empfindung, sondern nur eine solche, die mit der Empfindung der benachbarten Theile verschmilzt, verschaffen können, nicht dazu beitragen, uns den Zwischenraum wahrnehmen zu lassen. Wenn unsere Haut mit einer glatten Metallplatte berührt wird, so glauben wir eine continuirliche Berührung wahrzunehmen, und doch besteht unsere Hautoberfläche aus einem Mosaik empfindlicher und unempfindlicher Theile. Man sollte glauben, wir würden die Metallplatte nur da fühlen, wo sie empfindliche Theile berührt, und die Theile derselben, welche unempfindliche Theile der Haut berühren, würden uns wie Lücken in der Empfindung vorkommen, wie Zwischenräume, welche die empfundenen Theile trennten. Allein das ist nicht der Fall. Um Zwischenräume zu empfinden, müssen **empfindliche** Theile unserer Haut zwischen den berührten Theilen derselben liegen. Dasselbe gilt vom Auge, und wir haben hier Gelegenheit, diesen Satz an dem von Mariotte entdeckten blinden Flecke zu bestätigen.

Grösse, Lage und Gestalt des Mariotte'schen Flecks.

Die Eintrittstelle des Sehnerven, die etwas weniger als 1 Par. Lin. im Durchmesser hat, ist nur an ihrem Rande gegen das Licht empfindlich, von da nimmt die Empfindlichkeit schnell ab, und der mittlere Theil, der mehr als ⅔ des Durchmessers der ganzen Eintrittstelle hat, ist ganz unempfindlich. Er hat keine ästige Gestalt, die der *Arteria* und *Vena centralis retinae* entspricht, empfindliche und unempfindliche Stellen wechseln an ihm nicht mit einander ab, sondern er hat eine runde oder ovale, bisweilen eckige Gestalt, und die ganze Fläche ist daselbst unempfindlich. Sie nimmt nahe 6° auf unserem Sehfelde ein, d. h. wenn wir unser Auge nach dem Himmel richten, so bildet sich auf der blinden Stelle ein Theil des Himmels ab, welcher nahe 6° misst, so dass also ein runder oder ovaler Fleck des Himmels von uns nicht gesehen wird, auf dessen Durchmesser ungefähr 11 einander berührende Vollmonde Platz haben würden, denn der Mond erscheint uns ungefähr unter einem halben Grade. Dennoch sehen wir am Himmel und in den Wolken desselben keine Unterbrechung. Wie das möglich ist, werde ich weiterhin zeigen.

Diese blinde Stelle ist der Augenaxe so nahe, dass der nächste Theil des Randes derselben reichlich 12½° von der Augenaxe nach der Nase zu liegt, nämlich nach Listing's Messung*) an seinen beiden Augen im Mittel 12° 37'5. Der von der Augenaxe entfernteste Theil des Randes der blinden Stelle der Nervenhaut liegt nach der von Listing an seinen beiden Augen gemachten Messungen im Mittel 18° 33'4. Der Durchmesser des blinden Flecks nimmt nach ihm 5° 55'9 ein und ist also 1^{mm},55 breit, d. h. 0,6867 Par. Lin. Die Mitte des blinden Flecks ist nach Listing 15° 35'5 von der Augenaxe entfernt, d. h. nach Listing's eigner Berechnung (wobei die Distanz des Knotenpunkts von der Retina zu 15^{mm} angenommen wurde) 4^{mm},08 oder 1,808 Par. Lin. **)

*) Listing hat sich mit der Ausmessung des blinden Mariotte'schen Fleckes seiner eignen Augen beschäftigt und die Güte gehabt, mir die Resultate mitzutheilen.

**) Thomas Young (*Philosophical Transactions* 1801, *p.* 47) untersuchte die Grösse des blinden Flecks dadurch, dass er zwei Lichtflammen,

Bei mir und bei Theodor Weber ist die in Fig. IV. abgebildete weisse Scheibe, welche 8½ Par. Lin. im Durchmesser hat, noch unsichtbar, wenn sie sich auf dem blinden Flecke abbildet. Sie muss hierbei von der Hornhaut 8 Par. Zoll entfernt werden. Die Berechnung ergiebt hiernach, dass die blinde Stelle bei uns mindestens $1^{mm},27 = 0,553$ Par. Lin. im Durchmesser hat.

Die zahlreichsten Beobachtungen über die Grösse des blinden Flecks haben Hannover und Thomsen angestellt. Im Mittel aus 22 Messungen hatte der blinde Fleck in horizontaler Richtung 6 Grade 10 Minuten, nach Listing im Mittel aus den Messungen seiner zwei Augen 5 Gr. 55 Min. 9, nach Griffin, wenn der Fleck vorzüglich gross war, 7 Gr. 31 Min.

---

die 10 Zoll weit von einander abstanden, 16 Fuss weit vor seinen Augen aufstellte und sein eines Auge so richtete, dass sich die Flammen und ihr Zwischenraum auf dem blinden Theile des Sehnerven abbildeten. Dieses war der Fall, wenn er z. B. sein rechtes Auge auf einen Punkt richtete, der 4 Fuss weit nach links von der Mitte des zwischen beiden Flammen befindlichen Zwischenraums lag. Er sah dann einen confusen lichten Fleck, aber keine Flamme, sobald er aber das Auge ein Wenig einwärts oder auswärts drehte, sah er sogleich bald die eine, bald die andere Flamme. Nach ihm liegt die Mitte der blinden Stelle 0,16 Zoll (d. h. 1,92 Lin.) von der Augenaxe nach der Nase zu, und den Durchmesser des unempfindlichsten Theils der Retina berechnet er zu 1/30 Zoll (d. h. zu 0,396 Lin., also nahe 0,4 Lin. Lichtflammen eignen sich indessen zur Ausführung einer solchen Messung nicht so gut, als ein kleiner schwarzer Fleck auf weissem Papiere, oder ein weisser Fleck auf schwarzem Papiere bei guter Beleuchtung. Denn theils sind sie an sich nicht scharf begrenzt, theils erscheinen sie uns, umgeben mit Lichtschimmer und Strahlen, die vielleicht durch Ungleichheiten und Unebenheiten an der Oberfläche der Krystalllinse und der Hornhaut entstehen können, und ein Beweis sind, dass sich das Licht auf eine grössere Oberfläche der Nervenhaut ausbreitet, als es bei einem ganz scharfen Bilde der Fall sein würde. Wird der Kopf des Beobachters fest gestellt und ein kleiner weisser Fleck auf schwarzem Grunde in der passenden Richtung regelmässig verschoben, während das Auge auf einen Punkt fixirt ist, so sieht man den Fleck anfangs. In dem Augenblicke, wo sein Bild auf die blinde Stelle fällt, verschwindet er uns und bleibt so lange unsichtbar, bis sein Bild bei fortgesetzter Verschiebung des Flecks am gegenüberliegenden Rande der blinden Stelle wieder auf den empfindlichen Theil der Retina fällt.

Tabelle
über die Grösse des blinden Flecks auf der Nervenhaut.

3° 39′	4° 5′	5° 11′	6° 0′	7° 0′	8° 19′	9° 47′	Hannover und Thomsen.
3 51	4 40	5 11	6 10	7 6			
	4 44	5 21	6 17	7 7			
		5 29	6 48	7 33			
		5 39		7 40			
		5 49					
		5 55 2		7 31			Griffin.
		5 56 6					Listing.

Die Eintrittstelle des Sehnerven auf der innern Oberfläche des halbirten Augapfels eines Mannes kurze Zeit nach dem Tode fand ich bei meiner mikrometrischen Ausmessung ziemlich rund 0,93 Par. Lin. im Durchmesser und ihre Mitte 1,69 Par. Lin. von der Mitte der *macula lutea* (der Augenaxe) entfernt. Nach Listing's Berechnung war in seinem eigenen Auge, wie oben angeführt worden, die Mitte der Eintrittstelle des Sehnerven der Augenaxe 15° 35′5 oder nahe 1,8 Par. Lin. entfernt. Nach Hannover beträgt diese Entfernung im Mittel 14° 58′. Die mit Blut erfüllte *Arteria* und *Vena centralis retinae* traten in dem von mir untersuchten Auge aus dem Sehnerven hervor und theilten sich schnell in mit Blut erfüllte Aeste. Ich schnitt, nachdem ich das beobachtet hatte, den Sehnerven dicht an der äusseren Oberfläche der Sclerotica quer durch und untersuchte die Schnittfläche bei auffallendem Lichte. Abgesehen von der Hülle, bestand er aus zahlreichen runden Bündelchen. In der Mitte des Sehnerven, von diesen Bündelchen umgeben, sah man den sehr länglichen, an einem Ende breiten, am andern schmalen Querschnitt eines grauen, nicht aus Nervenfäden bestehenden Stranges, der die *Arteria* und *Vena centralis retinae* enthielt. Der längere Durchmesser des Querschnitts dieses Stranges betrug 0,313‴, d. h. knapp $\frac{1}{3}$ Lin., der kleinere Durchmesser des dicken Theils desselben maass 0,139‴, also ungefähr $\frac{1}{7}$ Lin. Der längliche Durchschnitt des einen Gefässstammes war 0,08‴ lang und 0,035 breit, also nahe $\frac{1}{12}$ Lin. lang und $\frac{1}{28}$ Lin. breit, der Querschnitt des anderen Gefässstammes war 0,093‴ lang und 0,058‴ breit, d. h. reichlich $\frac{1}{11}$ Lin. lang, $\frac{1}{17}$ Lin. breit.

Bei einem jungen gesunden Manne, 24 Stunden nach dem Tode, fand ich folgende Durchmesser:

der Eintrittstelle des Sehnerven, von innen gesehen	0,76	Par. Lin.
des Stammes der *Art. centr. retinae*. . . .	0,056	,, ,,
des Stammes der *Vena centr. retinae* . . .	0,063	,, ,,
des grössten Astes dieser Vene	0,047	,, ,,
der grösste Durchmesser des Raums, den beide Gefässe und der Zwischenraum zwischen ihnen einnehmen.	0,209	,, ,,
der grösste Durchmesser des grauen Strangs, der die *Art.* und *Vena centr. retinae* enthält, auf dem Querschnitte des Sehnerven an der äusseren Oberfläche des Augapfels . . .	0,28	,, ,,
langer Durchmesser der *macula lutea* . . .	0,338	,, ,,

Die *Arteria* und *Vena centralis retinae* waren mit Blut erfüllt und aus der Verbreitung jedes dieser Stämme zur ganzen Retina sah man, dass es die Arteria und Vena waren.

Durch diese Beobachtungen wird die Meinung derjenigen nicht bestätigt, welche annehmen, dass nicht die Eintrittstelle des Sehnerven, sondern nur die Eintrittstelle der *Arteria* und *Vena centralis retinae* blind sei. Dasselbe hat schon vor mir Hannover bewiesen. Die blinde Stelle müsste dann die Gestalt einer ästigen Gefässausbreitung, und könnte nicht eine runde oder ovale Fläche haben, die in allen ihren Theilen *uno continuo* unempfindlich wäre, und nach Listing's Messung mehr als ⅔ Lin. im Durchmesser hätte.

Hannover fand die Eintrittstelle des Sehnerven in 12 Fällen rund und in 12 Fällen oval, so dass der senkrechte Durchmesser der längere war. In 6 von diesen Fällen war das Oval zugleich etwas unregelmässig.

In der Mitte des *Colliculus nervi optici* fand Hannover immer eine Vertiefung, in welcher sich zwei feine Oeffnungen zeigten, die er für die *Arteria* und *Vena centralis retinae* hält.

Erscheinungen, welche man wahrnimmt, wenn sich Gegenstände auf dem blinden Flecke und auf dem benachbarten empfindlichen Theile der Retina abbilden.

Wenn man die Sonne oder einen andern sehr hellen Gegenstand mit unverwandtem Auge einige Zeit betrachtet, so ermüdet der Theil der Retina, auf welchem sich der helle Gegenstand abbildete.*) Der Theil des Himmels oder der Theil einer Wand, der sich nun, wenn das Auge weggewendet wird, auf dieser ermüdeten Stelle der Retina abbildet, erscheint uns dunkler, d. h. weniger hell als die Theile des Himmels oder der Wand, welche sich auf den nicht ermüdeten Theilen der Retina abbilden, oder erscheint uns sogar schwarz. Auf diese Weise entsteht ein Blendungsbild. Man vermisst daselbst den stärkeren Lichteindruck, weil man ihn gleichmässig stark wie in der Nachbarschaft zu empfangen gewohnt ist.

Es ist daher sehr interessant, dass die gänzlich blinde Stelle der Retina uns nicht als ein dunkler oder schwarzer Fleck am Himmel erscheint, und dass wir an einer gemusterten Tapete keine Lücke oder Unterbrechung in dem Muster wahrnehmen. Dieses rührt nicht allein daher, weil wir ausserhalb der Augenaxe Gestalten und Farben zu undeutlich sähen, um eine Unterbrechung derselben bemerken zu können. Denn meine Versuche beweisen, dass man bei heller Beleuchtung grosse weisse Figuren auf schwarzem Grunde, oder grosse schwarze Figuren auf weissem Grunde, auch noch in der Gegend des in das Auge eintretenden Sehnerven hinreichend deutlich sieht, um wahrnehmen zu können, ob sie durch Lücken unterbrochen sind oder nicht. Befindet sich z. B. mein rechtes Auge ungefähr in einer Entfernung von 8 Par. Zollen

*) Sehr wichtig für die Physiologie des Gesichtsinnes ist es, dass die Retina auch durch die längere Einwirkung einer und derselben Farbe auf einen und denselben Theil derselben, an diesem Orte gegen diese Farbe unempfindlicher wird und sie weniger lebhaft, oder endlich gar nicht mehr empfindet, während uns die benachbarten nicht ermüdeten Theile der Nervenhaut die gewöhnliche Empfindung derselben verschaffen und auch andere Farben an der ermüdeten Stelle vollkommen empfunden werden. Man sieht daraus, dass für die Empfindung jeder einzelnen Farbe im Auge oder im Gehirne Einrichtungen getroffen sind, welche sich durch einen längeren ununterbrochenen Gebrauch abnutzen können.

senkrecht über der Zahl I. auf der beigefügten schwarzen Tafel und blicke ich dann nach dem benachbarten x, so bildet sich der vom weissen Ringe eingeschlossene runde schwarze Fleck auf der blinden Stelle der Nervenhaut ab.*) Ich sehe dann nicht mehr einen weissen Ring, sondern eine weisse Scheibe, die denselben Durchmesser zu haben scheint, als vorher der weisse Ring. Ganz dasselbe ereignet sich, wenn ich einen schwarzen Ring auf weissem Grunde betrachte, denn dann sehe ich eine schwarze Scheibe, oder wenn ich einen farbigen Ring auf schwarzem Grunde betrachte, wo ich dann eine farbige Scheibe sehe.

Befindet sich mein rechtes Auge in einer Entfernung von ungefähr 8 Par. Zollen senkrecht über der Zahl II. und blicke ich nach dem benachbarten x, so verkürzt sich die Linie und das dicke Ende wird unsichtbar, und die Grenze der Linie wird unbestimmt und wie verwaschen. Diese Unbestimmtheit der Grenze die allmälig in den schwarzen Grund übergeht, rührt nicht bloss daher, dass das Bild in einiger Entfernung von der Augenaxe entsteht, sondern auch und hauptsächlich daher, dass der sehende

---

*) Um das Auge in der richtigen Entfernung und senkrecht über der Zahl I., II. oder III. zu halten, empfehle ich Denjenigen, welche die Versuche an den hier beigefügten Figuren wiederholen wollen, so zu verfahren. Sie mögen die schwarze Tafel auf einer horizontalen Ebene ausbreiten und auf I. ein Bruchstück eines Spiegels legen, das ungefähr ⅓ oder ½ Zoll im Quadrat gross ist, und darauf sehen, dass der Spiegel wirklich horizontal liege. Hierauf wird ein 8 Par. Zoll langes Holzstäbchen in einer kleinen Entfernung neben dem Spiegel senkrecht aufgestellt und der rechte Backenknochen des Beobachters darauf gestützt, so dass das rechte Auge sein eignes Bild, da wo der Buchstabe I. stand, im Spiegel sieht. Ist das andere Auge zugehalten und blickt der Beobachter nun nach x, so wird er den Ring in eine weisse runde Scheibe verwandelt sehen, wenn das Auge des Beobachters ähnlich construirt ist, als das meinige. Weicht es in der Lage der Eintrittstelle des Sehnernen nicht allzuviel ab von dem meinigen, so wird der angegebene Erfolg eintreten, wenn der Beobachter seinen Blick auf die nächste Umgegend von x richtet. Weicht dasselbe in seinem Baue mehr ab von dem meinigen, so kann er das Auge dem Papiere etwas mehr nähern, wenn er das Stäbchen schief stellt, oder es vom Papiere etwas entfernen, wenn er den Kopf so auf das Stäbchen stützt, dass das Auge höher liegt, als das Ende des Stäbchens. Um eine Messung auszuführen, muss das Stäbchen senkrecht stehen und den vom unteren Augenlide bedeckten Theil des Augapfels berühren. Man muss dann den Abstand des gesehenen Gegenstandes vom Stäbchen messen und daraus die Entfernung vom Kreuzungspunkte der Hauptstrahlen im Auge berechnen.

Theil der Nervenhaut nicht plötzlich an einer bestimmten Gränze gänzlich blind wird, sondern dass sie am Rande des eintretenden Sehnerven durch einen stumpfer und immer stumpfer fühlenden Theil allmälig in den ganz blinden Theil übergeht.

Verdecke ich die untere weisse breite Linie Fig. III. mit einem schwarzen Papiere und bringe mein rechtes Auge senkrecht über die Zahl III. in einer Entfernung von 8 Par. Zollen, und blicke dann nach dem benachbarten x, so bildet sich das untere Ende der oberen Linie auf der blinden Stelle meiner Nervenhaut ab, und diese Linie erscheint verkürzt und ihr unteres Ende ohne bestimmte Gränzen, wie verwaschen. Lasse ich nun aber das schwarze Papier hinwegnehmen, so verlängern sich beide Linien und ich glaube eine einzige continuirliche weisse Linie zu sehen. Dasselbe nehme ich an der unteren Linie wahr, wenn ich die obere Linie mit schwarzem Papiere verdecke und dann das Papier wieder hinwegnehmen lasse. Eben dasselbe nimmt man an zwei schwarzen Linien auf weissem Grunde wahr.

Man weiss schon seit langer Zeit, dass, wenn man ein kleines schwarzes Object auf einen farbigen oder weissen Grund legt und dann das Auge so stellt und richtet, dass sich das Object auf dem blinden Flecke der Nervenhaut abbildet, das schwarze Object unserm Blicke verschwindet und an der Stelle desselben der weisse oder farbige Grund gesehen wird. Aber man hatte keine Versuche gemacht, die uns auf die richtige Erklärung dieser merkwürdigen Erscheinung leiten konnten.

So glaubt z. B. Plateau*) dieselbe durch die sogenannte Irradiation erklären zu können, ein Wort, mit welchem von verschiedenen Schriftstellern verschiedene Dinge bezeichnet werden. Während einige die wirkliche physikalische Ausbreitung des Lichts auf der Nervenhaut über die Gränzen des Bildes hinaus, das eigentlich auf der Nervenhaut entstehen sollte, darunter verstehen (z. B. wenn durch mangelnde Accommodation des Auges Zerstreuungskreise sich bilden, oder wenn das Licht bei seinem Eintritte in die Hornhaut und in die Linse durch Ungleichheit der Oberfläche eine Zerstreuung erleidet), so gebrauchen andere dieses Wort für eine physiologische Erscheinung, die darin bestehen soll, dass ein Eindruck entweder auf der Nervenhaut oder im

*) *Moigno Répertoire d'optique moderne. Paris 1848, II. p. 601.*

Gehirne sich durch die angeregte Nerventhätigkeit ausbreite. Allein in diesem letzteren Sinne ist hierbei an eine Irradiation nicht zu denken. Denn nur starke Lichteindrücke, nicht das das Licht verschluckende Schwarz, können eine Irradiation verursachen. Auch sieht man nicht ein, warum eine weisse Linie, von welcher sich das eine Ende, wie in Fig. II., auf dem blinden Flecke und auf dem benachbarten empfindlichen Theile der Nervenhaut abbildet, keine Irradiation bewirkt, sondern sich verkürzt; eine Linie dagegen, wenn ihr, wie in Fig. III., eine zweite Linie derselben Art gegenüber liegt, sich verlängert und mit der andern zusammenwächst. Dieses sind keine Erscheinungen der Irradiation. Auch kann von einer Irradiation auf einem unempfindlichen Theile der Retina nicht die Rede sein.

Die Erklärung, welche ich von dieser Erscheinung geben kann, ist folgende: Dadurch, dass auf dem Hintergrunde der Hohlkugel unseres Auges sich alles abbildet, was im Sehfelde liegt, und dass wir diese Hohlkugel um ihren Mittelpunkt in verschiedenen Richtungen drehen, und diese Drehung selbst bis auf mikrometrische Grössen in unserer Gewalt haben, lernen wir die Richtung bestimmen, in welcher ein Gegenstand einem Punkte unserer Retina gegenüber liegt, auf welchem er sich abbildet. Nachdem wir dieses gelernt haben, entspricht jedem Punkte des Sehfelds ein Punkt auf unserer Retina, so dass, wenn ein Eindruck auf einen Punkt der Retina gemacht wird, wir den Gegenstand, von welchem dieser Eindruck kommt, in einer bestimmten Richtung zu sehen glauben. Diese ganze Deutung der Eindrücke, die wir auf der Retina empfangen, beruht nur auf Urtheilen, eben so wie es auf Urtheilen beruht, dass wir mit dem Ende einer Sonde an einem bestimmten Orte einen von ihr berührten Körper zu fühlen glauben.

Alle Körper, die sich auf dem empfindlichen Theile der Nervenhaut abbilden, sehen wir in derjenigen bestimmten Richtung, die wir durch die Drehung des Auges um seinen Mittelpunkt kennen gelernt haben. Jedem empfindlichen Punkte unserer Nervenhaut entspricht ein Punkt im Sehfelde, in dessen Richtung wir die Ursache der Empfindung suchen, auch wenn wir jetzt das Auge nicht bewegen. Die Region des Sehfelds, welche sich auf dem unempfindlichen Theile der Nervenhaut abbildet, *sehen wir nicht*, aber wir *stellen sie uns vor*, weil sie ringsum von dem empfindlichen Theile umgeben ist, mittelst dessen wir

das übrige Sehfeld sehen, das die unsichtbare Region unseres Sehfelds umgiebt. Es verhält sich auf ähnliche Weise mit der grossen unsichtbaren Region des uns umgebenden Raumes, die wir deswegen nicht sehen, weil sie hinter uns liegt, und sich also nicht in unsern Augen abbildet, weil von da keine Lichtstrahlen ins Auge gelangen, und weil das Stück der Nervenhaut fehlt, auf der sie sich bei einer andern Einrichtung des Auges abbilden könnte. Auch diese Region sehen wir nicht, und wir sehen sie daher auch nicht schwarz, wenn das übrige Sehfeld hell ist, denn Schwarz können wir nur da sehen, wo wir das Helle zu sehen gewohnt sind. Es findet aber die Verschiedenheit zwischen den beiden unsichtbaren Räumen statt, dass der letztere sehr gross ist, und nicht durch die Drehung des Auges, sondern durch die Drehung des Kopfes und des Körpers sichtbar werden kann. Wir sind uns bewusst, dass wir in der grossen hinter uns gelegenen Region nichts sehen können, wenn wir uns nicht bewegen. Dagegen haben wir ein grosses Bedürfniss, die durch die kleine fühllose Stelle der Nervenhaut unterbrochene Anschauung des Sehfelds zu ergänzen und die sich daselbst abbildenden Dinge uns im Zusammenhange vorzustellen. Dieses grosse Bedürfniss entsteht vielleicht, weil der Theil des Gehirns vorhanden ist, auf welchen Eindrücke gemacht werden würden, wenn die Eintrittstelle des Sehnerven empfindlich wäre. So viel ist gewiss, dass wir den Zusammenhang der Dinge, die in die nicht sichtbare Region des Sehfelds hineinreichen, so sehen, wie er am einfachsten und am wahrscheinlichsten ist.

Wenn der umgebende Theil des Sehfelds schwarz ist und eine weisse Linie ragt mit ihrem Ende in den Raum hinein, der sich auf dem blinden Flecke abbildet, so erscheint uns dieser Raum schwarz und die weisse Linie verkürzt sich um so viel, als sich von ihr auf dem blinden Flecke abbildet.*) Denn wir haben keinen Grund, sie uns länger vorzustellen, als der Theil derselben ist, der sich auf dem empfindlichen Theile der Retina abbildet, und den wir wirklich sehen. Liegt aber dieser Linie gegenüber jenseits des blinden Flecks eine zweite weisse Linie, die eine Verlängerung von jener sein könnte, so scheinen uns

*) Diese interessante Beobachtung hat zuerst Volkmann gemacht. Siehe Wagner's Handwörterbuch der Physiologie, Bd. III, p 337.

die weissen Linien sich wirklich zu verlängern und zu einer einzigen Linie zu verschmelzen, der übrige Theil des Sehfelds, der sich auf dem blinden Flecke abbildet, erscheint uns schwarz. Eben so verhält es sich, wenn eine schwarze Linie auf weissem Grunde befindlich ist.

Es ist dieses ein neuer Beleg zu der Erfahrung, dass Vorstellungen, zu den wir durch Schlüsse, die wir aus unsern Empfindungen ziehen, veranlasst werden, so mit den Empfindungen verschmelzen können, dass wir sie nicht mehr zu unterscheiden wissen, und dass wir dann das wirklich zu empfinden glauben, was wir uns nur vorstellen.

So glauben wir zu sehen, dass der aufgehende oder untergehende Mond eine viel grössere Scheibe sei, als der hoch am Himmel stehende Mond, und dasselbe gilt von der Sonne, und doch sehen wir beide in diesen verschiedenen Stellungen genau unter demselben Gesichtswinkel. Weil uns das Himmelsgewölbe nicht wie eine halbe Hohlkugel, sondern wie ein Uhrglas erscheint, und weil uns daher die Entfernung des Himmels von der Erde in senkrechter Richtung viel kleiner erscheint, als in horizontaler, und dennoch der Mond stets etwa unter einem halben Grade gesehen wird, so erscheint er uns am Horizonte grösser, weil er daselbst von uns entfernter zu sein scheint, als in der Nähe des Zenith, wo er uns näher zu sein scheint.

Zwei gleich grosse Gläser auf einem Tische, von welchen das eine uns etwas näher, das andere von uns etwas entfernter ist, erscheinen uns gleich gross, ungeachtet das Nähere sich auf unserer Nervenhaut grösser abbildet, als das Entferntere.

Stemmen wir einen Bleistift mit seiner Spitze auf den Tisch auf, indem wir mit unserm Finger gegen das andere breite Ende desselben drücken, so glauben wir zwei Empfindungen zu haben. Aber nur die Empfindung an unserer Fingerspitze ist eine wirkliche Empfindung, die Empfindung, die wir von der Berührung, in welche die Bleistiftspitze mit dem Tische kommt, zu haben glauben, beruht nur auf Urtheilen.

Resultate über den Raumsinn in der Haut und im Auge.

1) Der Raumsinn bedarf keiner eigenthümlichen Werkzeuge, durch welche eine besondere, von andern Sinnesempfindungen qualitativ verschiedene Empfindung vermittelt wird (S. 128).

2) Die Lichtempfindungen, ferner die Druck- und Temperaturempfindungen, werden daher zugleich benutzt, uns Eindrücke, die von verschiedenen Raumpunkten ausgehen, zu verschaffen (S. 128).

3) Aber deswegen sind der Lichtsinn, Druck- und Temperatursinn nicht für identisch zu halten mit dem Raumsinne des Auges und der Haut (S. 86 und 129).

4) Vielmehr lehrt die Erfahrung, dass der Raumsinn des Auges sehr vollkommen sein kann, während der Licht- oder Farbensinn sehr unvollkommen ist (S. 128, 129), und dass der Raumsinn an Theilen des Unterarms, Oberarms, auf dem Rücken und auf mehreren andern Theilen 18- bis 25mal stumpfer ist, als an den Fingerspitzen, und 36- bis 50mal stumpfer ist, als auf der Zungenspitze, und dass dennoch hinsichtlich der Feinheit des Drucksinns und Temperatursinns in diesen Theilen nur eine sehr geringe Verschiedenheit beobachtet wird (S. 86, 106—111).

5) Hieraus muss man schliessen, dass die für den Raumsinn getroffenen besonderen Einrichtungen von den Einrichtungen, die für den Lichtsinn, Temperatursinn und Farbensinn existiren, verschieden sind (S. 129).

6) Die besonderen Einrichtungen für den Raumsinn haben den Zweck, zu bewirken, 1) dass Bewegungen in der Natur, die von bestimmten Punkten des Raumes ausgehen, auf bestimmte Punkte des Sinnorgans, die in einer ähnlichen Ordnung neben einander liegen, unterscheidbare Eindrücke machen können, oder mit andern Worten, dass sich jene Raumpunkte auf unsern Sinnorganen abbilden und Empfindungen hervorrufen, die sich von einander unterscheiden lassen, weil die Orte, wo jene Bilder der Punkte entstehen, durch separate Nervenfäden mit dem Gehirne zusammenhängen; 2) dass die dem Raumsinn dienenden Sinnorgane mit Feinheit und Sicherheit in bestimmten Richtungen bewegt werden können, so dass wir selbst dadurch einen

von unserer willkührlichen Bewegung abhängenden Wechsel der Empfindungen herbeiführen und uns dadurch unserer Bewegung bewusst werden, dieselbe absichtlich auszuführen lernen und uns durch Schlüsse eine Vorstellung von dem Orte verschaffen, von wo auf unser Sinnorgan eingewirkt wird (S. 103, 129—132).

7) Je grösser die Zahl der Punkte in einem gegebenen Raume ist, welche sich auf unserm Sinnorgane abbilden und separate Empfindungen erwecken, und je feiner und sicherer die absichtliche Bewegung unserer Sinnorgane, desto feiner ist *caeteris paribus* der Raumsinn (S. 129).

8) Hieraus erklärt sich, wodurch der Raumsinn im Auge unter günstigen Umständen ungefähr 840mal feiner sein kann, als an den Fingerspitzen, und 420mal feiner, als an der Zungenspitze, dem feinsten Tastorgane, und dass er bei minder scharfen Augen 400- bis 600mal feiner angenommen werden darf, als an den Fingerspitzen, und 200- bis 300mal feiner, als an der Zungenspitze (S. 147).

9) Die Fähigkeit, die Sinneneindrücke, wie man zu sagen pflegt, in einen ausserhalb unsers Körpers befindlichen Raum zu projiciren, haben wir nicht nur im Auge, sondern auch in der Haut; wir führen diese Projection bei beiden Organen so aus, dass wir allererst vermöge der absichtlichen Bewegung unsers Sinnorgans und des dadurch herbeigeführten bestimmten Wechsels der Empfindungen unser Sinnorgan als ein Bewegtes von den Objecten als ruhenden Gegenständen unterscheiden (S. 121).

10) Der Umstand, dass die mit unserer bewegten Hand befühlten Gegenstände der Bewegung derselben Widerstand leisten und uns nöthigen, wenn wir sie zugleich fortwährend fühlen wollen, die Richtung, in der wir die Hand bewegen, ihrer Gestalt gemäss abzuändern, veranlasst uns zu der Annahme, dass sie unsern fühlenden Theilen dicht gegenüber liegen. Dass aber auch hierbei eine Projection der Sinneseindrücke nach aussen Statt finde, ergiebt sich nicht nur daraus, dass wir unsere Hand als ein Bewegtes, von den Objecten als ruhenden Gegenständen unterscheiden, sondern dasselbe beweist auch der Versuch, wo wir mit über einander geschlagenen Fingern unsere Nasenspitze doppelt und jede der beiden Nasenspitzen anders wohin gerichtet fühlen, vermöge der irrthümlichen Annahme,

dass die die Nase berührenden Seiten der Fingerspitzen von einander abgekehrt seien (S. 120, 122).

11) Diese Projection der in unserer Haut entstehenden Sinneseindrücke nach aussen und die Regeln, wornach dieselbe geschieht, erkennt man, wenn man sich genaue Rechenschaft giebt über das, was bei dem Fühlen durch Sonden bei verschlossenen Augen vor sich geht. Wenn man ein auf einen ruhenden Körper aufgestemmtes Stäbchen mit der Hand, die das obere freie Ende desselben berührt, an den ruhenden Körper andrückt und um sein unteres Ende dreht, wobei sich die Hand in einem Kreisbogen um dasselbe bewegt; so hat man in jedem Augenblicke gleichzeitig zwei Empfindungen, die eine, wodurch man den Druck des Fingers auf das Stäbchen, die zweite, wodurch man den Druck des Stäbchens auf dem Körper wahrnimmt. Beide Empfindungen befinden sich in einem gewissen Abstande von einander, so dass man in jedem Augenblicke die Richtung einer die Orte beider Empfindungen verbindenden Linie angeben kann und durch diese Richtungen sogar die Entfernung bestimmt, in welcher sich der mit dem Stäbchen berührte Körper von der Hand befindet, nämlich im Mittelpunkte des Kreisbogens, welchen die Hand beschreibt. Von diesem Kreisbogen erlangt man auch dann eine Vorstellung, wenn man die Länge des Stäbchens vorher nicht kannte. Die Empfindung des Drucks des Stäbchens gegen den ruhenden Körper ist keine wirkliche, sondern eine projicirte Empfindung, d. h. ein Urtheil über den Druck, den das Stäbchen auf jenen Körper ausübt, und über die Richtung und Entfernung des Orts, wo es diesen Druck ausübt. Diese projicirte Empfindung hört sogleich auf, sobald das untere Ende des Stäbchens unbeweglich mit dem ruhenden Körper verbunden wird. Auch die Empfindung des Drucks des Fingers auf das Stäbchen ist gleichfalls keine wirkliche, sondern eine projicirte Empfindung, denn dieselbe hört sogleich auf, sobald das obere Ende des Stäbchens mit dem empfindlichen Theile des Körpers unbeweglich verbunden ist. Dieses ist bei den Zähnen der Fall, welche als kurze Stäbchen betrachtet werden können. Die Empfindung, welche entsteht, wenn wir einen zwischen die Zähne der beiden Kinnladen gebrachten Körper drücken, hat nicht ihren Ort in der empfindlichen Haut, die die Zahnzelle auskleidet, sondern an der Oberfläche des unempfindlichen Zahns, welcher sich an dem zu fühlenden Körper bewegt. Diese projicirte Em-

pfindung beruht auf einem Gefühle des Drucks, den die Zähne auf die Haut der Zahnzelle ausüben, und auf einem Urtheile über die Richtung und Entfernung des Orts, von wo der Widerstand ausgeht, und dieses Urtheil gründet sich auf die Wahrnehmung der Bewegung, die die Zähne auf dem Körper, den sie berühren, machen (S. 118—120).

12) So wie wir also die Einwirkung des Lichts gar nicht auf der Retina fühlen, sondern die Empfindung da zu haben glauben, wohin wir sie projiciren, so empfinden wir den Druck, den die bewegte Kinnlade durch die Zähne gegen den berührten Körper ausübt, gar nicht an der empfindlichen Haut der Zahnwurzeln, sondern da, wo die unempfindliche Oberfläche der Zähne den Körper berührt, und wo die wirkliche Empfindung gar nicht ihren Sitz haben kann. Aus dem Gesagten und aus manchen andern Betrachtungen geht hervor, dass wir ursprünglich über den Ort, wo eine Empfindung entsteht, gar nichts wissen, sondern dass wir uns erst durch Urtheile eine Vorstellung über diesen Ort bilden und dann die Empfindung an diesem Orte zu haben glauben (S. 118).

13) Dass wir durch die gesetzmässige Veränderung der Gesichtsempfindungen, die dadurch entsteht, dass wir uns selbst im Raume fortbewegen, dass wir beide Augen sammt dem Kopfe um die senkrechte Axe des die beiden obersten Wirbel verbindenden Gelenks horizontal drehen, dass wir beide Augen sammt dem Kopfe um die horizontale Axe des Gelenks, welches den Kopf und den Atlas verbindet, senkrecht drehen, dass wir die Augäpfel um ihre Mittelpunkte drehen, und endlich unsere Hände vor unsern Augen bewegen, hinreichende Gelegenheit haben, uns über die Richtung der sichtbaren Objecte ein Urtheil zu bilden und unsere Empfindung in dieser Richtung zu projiciren, leuchtet von selbst ein, und es lässt sich nachweisen, dass auch die Blindgebornen und später durch eine Operation sehend gewordenen schon vor der Operation hinreichende Gelegenheit gehabt haben, dieses Projiciren zu erlernen (S. 130—133).

Erklärung der Tafel.

Fig. I. Wenn sich der runde schwarze, von einem breiten weissen Ringe umgebene Fleck auf dem empfindungslosen Theile der Nervenhaut abbildet, so sieht man eine weisse Scheibe. Man

lege, um das selbst zu beobachten, das Blatt ganz eben, befestige auf I. das Stückchen eines Spiegels, stelle unter I. ein 8 P. Zoll langes Stäbchen senkrecht auf, stütze darauf den Unteraugenhöhlenrand des rechten Auges, während das linke bedeckt ist, und sorge dafür, dass die Augen so liegen, dass eine die inneren Augenwinkel verbindende Linie dem oberen Rande der Tafel parallel, und dass die Pupille desselben im Spiegel sichtbar sei. Richtet man nun das Auge nach x, so wird der weisse Ring als eine weisse Scheibe erscheinen, wenn das Auge dem des Verfassers ähnlich gebaut ist.

Fig. II. Wenn man hier eben so verfährt, so sieht man die Figur eines Beils sich so verkürzen, dass das Beil verschwindet und nur ein Theil des Stiels sichtbar bleibt. Der verkürzte Stiel hört nicht mit einem Male und mit einer scharfen Gränze auf sichtbar zu sein, sondern allmählig, weil der Theil desselben, der sich auf dem Rande der Eintrittstelle des Sehnerven abbildet, nicht ganz unsichtbar ist, sondern desto unvollkommener sichtbar, jemehr er sich der ganz blinden Stelle nähert.

Fig. III. Wenn man die untere senkrechte Linie, so wie auch Fig. IV. und V., mit schwarzem Papiere zudeckt, sonst aber eben so verfährt, wie bei den vorigen Figuren, so verkürzt sich die obere senkrechte weisse Linie. Lässt man nun die untere senkrechte Linie aufdecken, so zeigen sich beide Linien verlängert, so dass sie in eine einzige continuirliche Linie zusammenfliessen.

Fig. IV. ist eine weisse Scheibe, die 8 Par. Lin. im Durchmesser hat. Dieselbe wird, wenn das Auge 4 Zoll von derselben entfernt ist und in eine ähnliche Lage gebracht wird, als bei den vorigen Figuren (wozu aber hier keine Anweisung gegeben ist), unsichtbar, sobald sie sich auf dem blinden Flecke der Retina abbildet.

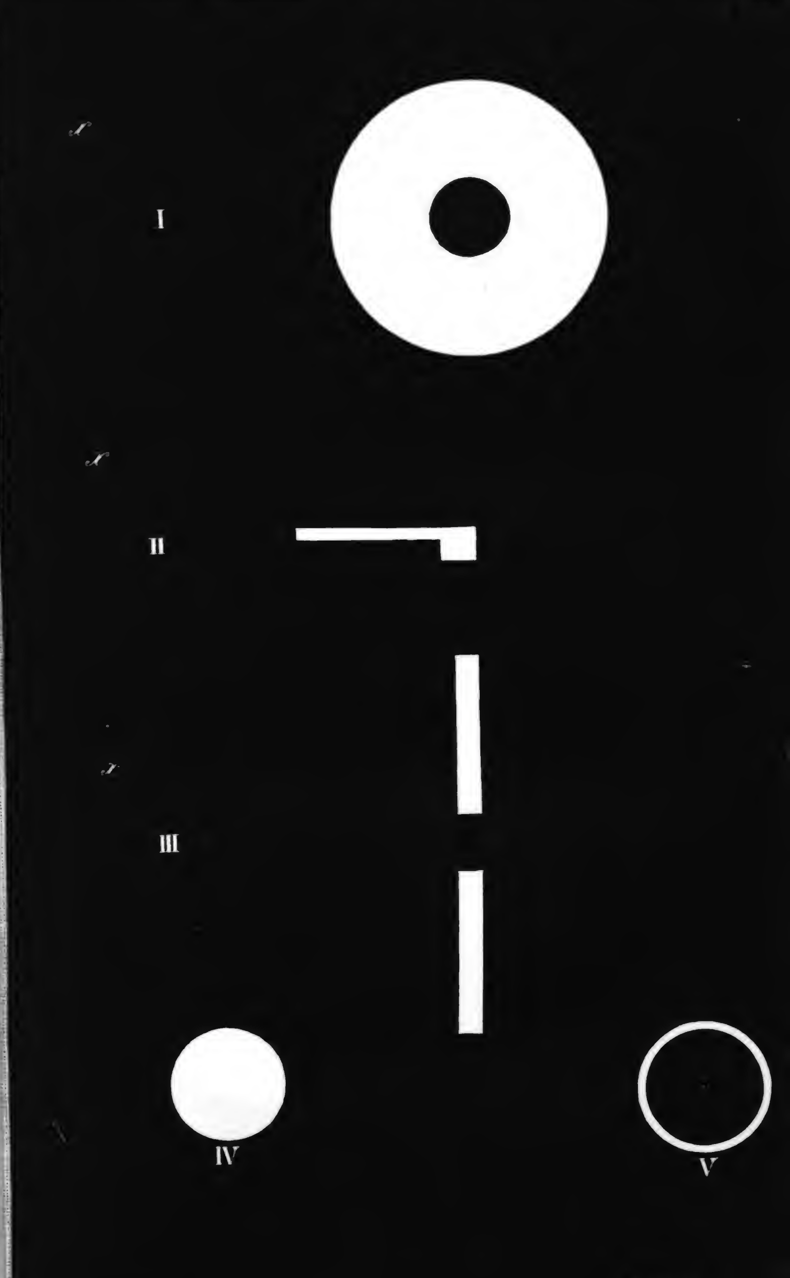
Fig. V. Der weisse schmale Ring ist um so viel grösser, als die weisse Scheibe, dass sich sein innerer Rand an sie anschliessen würde, wenn er sie umgäbe. Bei einer Entfernung von 8 Par. Zollen wird der Ring nicht ganz unsichtbar, denn er ist schon ein Wenig zu gross und bildet sich schon auf dem Rande der Eintrittstelle des Sehnerven ab, der nicht ganz empfindungslos ist, sondern eine stumpfe Empfindlichkeit hat. In der günstigsten Stellung breitet er sich in einen weissen Nebel aus. Ist das Auge in einer solchen Lage, dass sich ein Theil des Rings auf dem

empfindlichen Theile der Nervenhaut, ein Theil aber auf der blinden Stelle der Nervenhaut abbildet, so verschwindet dieses letztere Stück des Rings. Bildet sich ein Theil des Rings dicht am Rande des blinden Flecks auf dem empfindlichen Theile der Nervenhaut ab, so erscheint er als ein Stück einer weissen Scheibe.

Wilhelm Weber, *Verbesserung einer Formel in den elektrodynamischen Maassbestimmungen.*

S. 572, Zeile 22 der letzten Abhandlung über elektrodynamische Maassbestimmungen im ersten Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften ist für y statt des strengen Ausdrucks ein Näherungswerth gesetzt worden. Ich verbessere dieses Versehen, indem ich bemerke, dass dasselbe keinen merklichen Einfluss auf die daraus abgeleiteten numerischen Angaben hat. Es ergiebt sich nämlich der genaue Integralwerth von y für alle Werthe von X, welche kleiner als D sind, $y = \frac{2}{3} n\mu \frac{X}{D}$; für alle Werthe von X, welche grösser als D sind, $y = n\mu \left(1 - \frac{1}{3} \frac{DD}{XX}\right)$.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.


I
II
III
IV
V

(Verlag von S. Hirzel in Leipzig.)

ABHANDLUNGEN bei Begründung der Kön. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Jablonowskischen Gesellschaft. Mit Leibnizens Bildniss. Hoch 4. 1846. 5 Thlr.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Jablonowskischen Gesellschaft. I. Hoch 4. 1847. 20 Ngr.

Inhalt: H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*.

—— № II. Hoch 4. 1850. 16 Ngr.

Inhalt: H. B. GEINITZ, das Quadergebirge oder die Kreideformation in Sachsen. Mit 1 col. Tafel.

—— № III. Hoch 4. 1851. 10 Ngr.

Inhalt: J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Aus den Jahren 1846 u. 1847. 12 Hefte in gr. 8. à 10 Ngr.

—— Aus dem Jahre 1848. 6 Hefte in gr. 8. à 10 Ngr.

—— der philologisch-historischen Classe. 1849. 5 Hefte. 1850. 4 Hfte. 1851. 5 Hfte. 1852. 4 Hfte. 1853. 1 Hft. gr. 8. à 10 Ngr.

—— der mathematisch-physischen Classe. 1849. 3 Hefte. 1850. 3 Hfte. 1851. 2 Hfte. 1852. 2 Hfte. gr. 8. à 10 Ngr.

ABHANDLUNGEN der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. I. Hoch 4. 1852. 4 Thlr. 16 Ngr.

Inhalt:

A. F. MÖBIUS, Grundformen der Linien der dritten Ordnung. (24 Ngr.)

P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. (12 Ngr.)

A. SEEBECK, über die Querschwingungen gespannter und nicht gespannter elastischer Stäbe. (10 Ngr.)

C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. (10 Ngr.)

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Widerstandsmessungen. (1 Thlr.)

F. REICH, neue Versuche mit der Drehwaage. (20 Ngr.)

M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. (16 Ngr.)

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über Diamagnetismus. (20 Ngr.)

Vom II. Bande ist bis jetzt erschienen:

M. W. DROBISCH, über musikal. Tonbestimmung u. Temperatur. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. 1 Thlr. 10 Ngr

INHALT.

Seite

Drobisch, über die Wellenlängen und Oscillationszahlen der farbigen Strahlen im Spectrum 57

Hankel, über die Messung der atmosphärischen Elektricität . . 74

Lehmann, über den krystallisirbaren Stoff des Blutes 78

E. H. Weber, über den Raumsinn und die Empfindungskreise in der Haut und im Auge 85

Wilhelm Weber, Verbesserung einer Formel in den elektrodynamischen Maasbestimmungen 164

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.





